Definition

Eine linkslineare Grammatik ist ein kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to aB$, $C \to b$ und $D \to \epsilon$ mit $A, B, C, D \in N$ und $a, b \in T$.

Theorem

Linkslineare Grammatiken erzeugen genau die regulären Sprachen.

Lemma

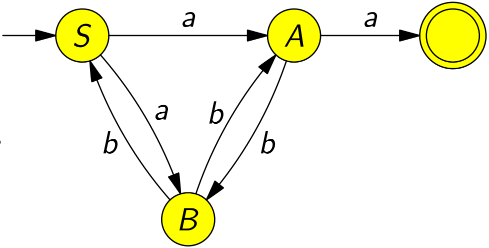
Jede linkslineare Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache.

Beweis.

Konstruiere den Kellerautomaten zu einer linkslinearen Grammatik.

Der Keller kann nie mehr als ein Symbol enthalten.
Ein endlicher Automat kann also den Kellerautomaten simulieren. □

Beispiel



$$S \to aA \mid aB$$
$$A \to a \mid bB$$
$$B \to bA \mid bS$$

Lemma

Jede reguläre Sprache wird durch eine linkslineare Grammatik erzeugt.

Beweis.

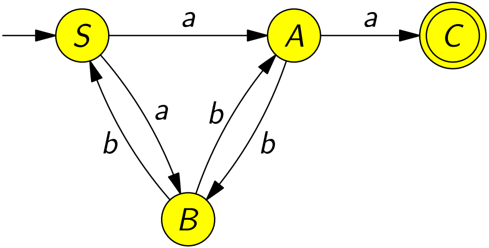
Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.
Definiere die Grammatik $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit den Produktionen

1. $q \to ap$ falls $p \in \delta(q, a)$ und
2. $q \to \epsilon$ falls $q \in F$.

Mit Induktion über $|w|$:

$p \in \hat{\delta}(w, q_0)$ gdw. $q_0 \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$. $\square$

Beispiel



$$S \to aA \mid aB$$
$$A \to aC \mid bB$$
$$B \to bA \mid bS$$
$$C \to \epsilon$$

Kontextsensitive Sprachen sind eine echte Obermenge der kontextfreien Sprachen:

$$L = \{\, \$w\$w\$ \mid w \in \{a,b\}^* \,\}$$

$$\begin{aligned}
S &\to LMR \\
M &\to AM\bar{A} \mid BM\bar{B} \mid \$ \\
\bar{A}A &\to A\bar{A}, \quad \bar{A}B \to B\bar{A} \\
\bar{B}A &\to A\bar{B}, \quad \bar{B}B \to B\bar{B} \\
\bar{A}R &\to AR, \quad \bar{B}R \to BR \\
L &\to \$ \\
R &\to \$ \\
A &\to a \\
B &\to b
\end{aligned}$$

Theorem

Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen ist nicht entscheidbar.

Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

$$\begin{aligned} S &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \\ M &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \mid D \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Rest der Grammatik: Übungsaufgabe)

Sprache ist leer gdw. I keine Lösung hat.

Theorem

Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar.

Beweis.

Es sei G eine kontextsensitive Grammatik und w ein Wort.

Wende Regeln rekursiv rückwärts auf alle möglichen Arten an.

Wir erhalten so alle α mit $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Ist das Startsymbol darunter?

Terminierung: $|\alpha| \leq |w|$ falls $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$. $\square$

Theorem

Das Wortproblem für Chomsky-0-Sprachen ist nicht entscheidbar.

Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \\ \\ v_1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \\ \\ v_2 \end{array}}, \dots, \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \\ \\ v_n \end{array}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \\
M &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \mid D \\
0D0 &\to D \\
1D1 &\to D \\
D &\to \epsilon
\end{aligned}$$