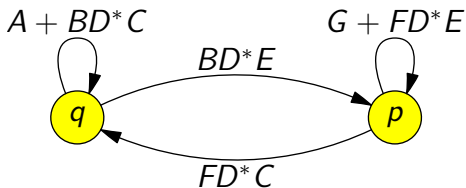
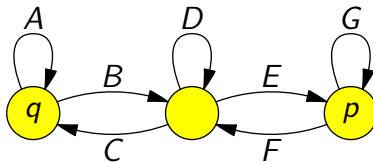


Eliminierung eines Zustandes

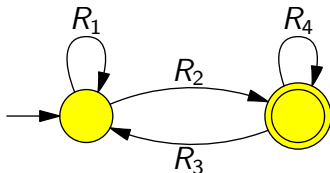


Für *alle* Paare (p, q) !

Eliminierung von Zuständen

Allgemeines Vorgehen:

- 1 Starte mit einem NFA mit nur einem Endzustand
- 2 Eliminiere Zustände bis auf den Start- und Endzustand
- 3 Lies den regulären Ausdruck ab



Gesuchter Ausdruck ist:

$$R_1^* R_2 (R_4 + R_3 R_1^* R_2)^*$$

Theorem (Pumping-Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt $n \in \mathbf{N}$, so daß jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ in Wörter $w = xyz$ zerlegt werden kann mit

- 1 $|xy| \leq n$
- 2 $|y| > 0$
- 3 $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$

Beweis.

Es sei $L = L(M)$ für einen DFA M mit n Zuständen.

Ist $|w| \geq n$ dann durchläuft M einen Zustand doppelt.

p sei der erste solche Zustand.

Es gibt also $xyz = w$, mit

- $\hat{\delta}(q_0, x) = p$,
- $\hat{\delta}(p, y) = p$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0$,
- $xy^i z \in L$

Das Pumping-Lemma als Spiel

Gegeben sei eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$.

- 1 Alice wählt eine Zahl n .
- 2 Bob wählt ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$.
- 3 Alice wählt $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $xyz = w$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0$.
- 4 Bob wählt eine Zahl i .

Alice gewinnt, wenn $xy^iz \in L$.

Bob gewinnt, wenn $xy^iz \notin L$.

Falls L regulär ist, kann Alice immer gewinnen.

Gewinnstrategie für Bob $\implies L$ nicht regulär!

Beispiel

Es sei $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$.

- 1 Alice wählt eine Zahl n .
- 2 Bob wählt $w = a^n b^n$.
- 3 Alice wählt $x, y, z \in \{a, b\}^*$ mit $xyz = w$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0$.
- 4 Bob wählt $i = 2$.

Bob hat gewonnen:

$xyyz$ enthält eine ungleiche Anzahl von a und b .

Also ist L (leider) nicht regulär.

Beispiel

Es sei $L = \{ a^{n^3} \mid n \geq 0 \}$.

- 1 Alice wählt eine Zahl n .
- 2 Bob wählt $w = a^{m^3}$ mit $m = n + 30$.
- 3 Alice wählt $x, y, z \in a^*$ mit $xyz = w$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0$.
- 4 Bob denkt: $x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^t$ mit $r + s + t = m^3$.
Bob wählt $i = 0$ und denkt weiter:

$$(m-1)^3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 < m^3 - m \leq |xy^0z| = r + t < m^3$$

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist in polynomieller Zeit lösbar:

Eingabe: Ein DFA, NFA oder ein regulärer Ausdruck für Sprache L

Frage: Ist $L = \emptyset$?

Beweis.

DFA, NFA: Ist ein Endzustand vom Anfangszustand erreichbar?

Lineare Laufzeit mit Tiefensuche.

Regulärer Ausdruck: In NFA verwandeln. □

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Wortproblem für reguläre Sprachen ist in quadratischer (DFA: linearer) Zeit lösbar:

Eingabe: Ein DFA, NFA oder ein regulärer Ausdruck für Sprache L

Frage: Ist $w \in L$?

Beweis.

DFA: Algorithmus aus Vorlesung

Laufzeit: $O(|M| + |w|)$

NFA: Algorithmus aus Vorlesung

Laufzeit: $O(|M| + |Q|^2 \cdot |\Sigma| + |Q|^2 \cdot |w|)$

Regulärer Ausdruck: In NFA verwandeln.



Das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen ist algorithmisch lösbar:

Eingabe: DFA, NFA oder regulärer Ausdruck für Sprache $L \subseteq \Sigma^$*

Frage: Ist $L = \Sigma^$?*

Beweis.

DFA: Sind alle erreichbaren Zustände Endzustände?

Lineare Laufzeit mit Tiefensuche.

NFA, regulärer Ausdruck: In DFA verwandeln.

Exponentielle Laufzeit. □

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist in linearer Zeit lösbar:

Eingabe: DFA, NFA oder regulärer Ausdruck für Sprache $L \subseteq \Sigma^$*

Frage: Ist L endlich?

Beweis.

NFA, DFA: Gibt es

- 1 eine starke Zusammenhangskomponente, die vom Startzustand erreichbar ist, und
- 2 von der aus ein Endzustand erreichbar ist?

Lineare Laufzeit (Konstruktion der starken Zusammenhangskomponenten: Datenstrukturen und Algorithmen)



Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist algorithmisch lösbar:

Eingabe: Zwei DFAs, NFAs oder reguläre Ausdrücke für Sprachen L_1 und L_2

Frage: Ist $L_1 = L_2$?

Beweis.

DFA: Minimiere beide und teste ob sie dann isomorph sind.

NFA, Regulärer Ausdruck: In DFA verwandeln. □

Kontextfreie Grammatik

Definition

Eine *kontextfreie Grammatik* ist ein 4-Tupel (N, T, P, S)

- N ein Alphabet der *Nonterminale* oder *Variablen*
- T ein Alphabet der *Terminalsymbole*
- P Menge von *Produktionen* der Form $A \rightarrow \alpha$
mit $A \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$
- $S \in N$ das *Startsymbol*

Wir verlangen $N \cap T = \emptyset$.

Satzformen sind die Wörter aus $(N \cup T)^*$.

Notation:

Wir verwenden oft

- a, b, c, \dots für Terminalsymbole
- A, B, C, \dots für Nonterminale
- u, v, w, \dots für Terminalwörter aus T^*
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ für Satzformen

Beispiel

Eine kontextfreie Grammatik:

$$G = (\{E, A\}, \{0, 1, +, -, (,)\}, P, E)$$

mit

$$P = \{E \rightarrow (E + E), E \rightarrow (E - E), E \rightarrow A, A \rightarrow 0, A \rightarrow 1, A \rightarrow AA\}$$

Ableitungen

Wir definieren die Relation

$$\Rightarrow_G: (N \cup T)^* \rightarrow (N \cup T)^*$$

vermöge

$$\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta \text{ falls } A \rightarrow \gamma \in P.$$

\Rightarrow_G heißt Ableitungsrelation.

\Rightarrow_G^* ist die reflexiv-transitive Hülle von \Rightarrow_G

Beispiel

$$G = (\{E, A\}, \{0, 1, +, -, (,)\}, P, E)$$

mit

$$P = \{E \rightarrow (E + E), E \rightarrow (E - E), E \rightarrow A, A \rightarrow 0, A \rightarrow 1, A \rightarrow AA\}$$

$$E \Rightarrow (E + E) \Rightarrow (E + A) \Rightarrow (A + A) \Rightarrow (AA + A) \Rightarrow (A0 + A) \Rightarrow (A0 + 1) \Rightarrow (10 + 1) \in T^*$$

Wir geben in Zukunft oft nur die Produktionen an.

(Wenn klar ist was N , T und das Startsymbol sind.)

Sprache einer Grammatik

Definition

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Wir definieren $L(G) = \{ w \in T^* \mid S \xRightarrow{*} w \}$.

$L(G)$ ist die von G erzeugte Sprache.

Wir nennen $\alpha \in \beta$ einen *Ableitungsschritt* und

$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_{n-1} \Rightarrow w$ eine *Ableitung* von w .

Eine Ableitung ist eine Linksableitung, falls in jedem Schritt das am weitesten links stehende Nonterminal ersetzt wird.

(Rechtsableitung analog).

Beispiel

CFG G mit $S \rightarrow aSSb$, $S \rightarrow \epsilon$.

$S \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSSbSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSSbb \Rightarrow$
 $aabaSbb \Rightarrow aababb$

ist eine Linksableitung von $aababb$.

Ableitungsbäume

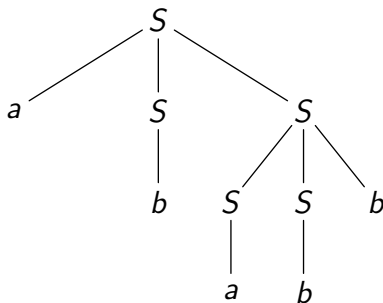
Definition

Ein Ableitungsbaum ist ein Baum:

- 1 er hat eine Wurzel
- 2 er ist orientiert
- 3 innere Knoten sind Nonterminale
- 4 Blätter sind Terminalsymbole
- 5 Kinder eines inneren Knotens A sind rechte Seite einer Produktion $A \rightarrow \alpha$

Beispiel

$$S \rightarrow aSS \mid SSb \mid a \mid b$$



Zugehörige Linksableitung:

$$S \Rightarrow aSS \Rightarrow abS \Rightarrow abSSb \Rightarrow abaSb \Rightarrow ababb$$

Theorem

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $w \in T^*$.

Dann gilt $w \in L(G)$ genau dann, wenn es einen Ableitungsbaum gibt

- mit Wurzel S ,
- mit Blättern w .

Beweis.

(Idee) Allgemeinere Aussage:

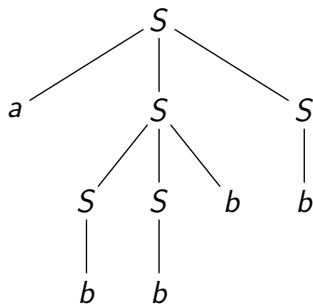
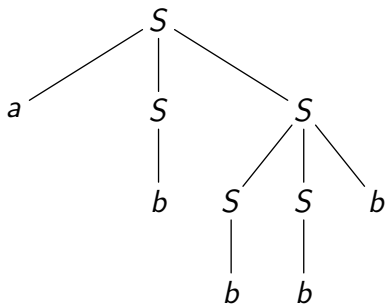
$A \xRightarrow{*} \alpha$ genau dann, wenn Ableitungsbaum mit Wurzel A und Blättern α .

Beweis mit Induktion über Länge einer Ableitung. □

Zu jedem Ableitungsbaum gibt es eine *eindeutige* Linksableitung.

Eindeutigkeit

$$S \rightarrow aSS \mid SSb \mid a \mid b$$

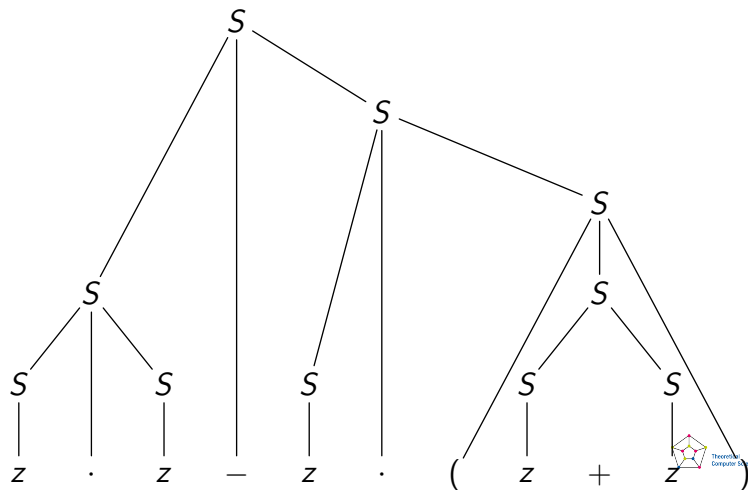


Es gibt zwei verschiedene Linksableitungen.

Beispiel 1

$$S \rightarrow S + S \mid S - S \mid S \cdot S \mid S / S \mid (S) \mid z$$

Betrachte: $z \cdot z - z \cdot (z + z)$



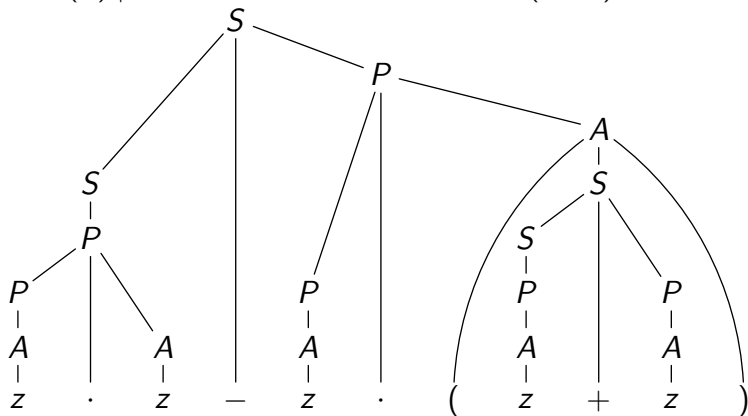
Beispiel 2

$$S \rightarrow S + P \mid S - P \mid P$$

$$P \rightarrow P \cdot A \mid P / A \mid A$$

$$A \rightarrow (S) \mid z$$

Betrachte: $z \cdot z - z \cdot (z + z)$



Welchen Vorteil hat diese Grammatik?

Beispiel 3

$$S \rightarrow P + S \mid P - S \mid P$$

$$P \rightarrow A \cdot P \mid A/P \mid A$$

$$A \rightarrow (S) \mid z$$

Betrachte: $z \cdot z - z \cdot (z + z)$

Welchen Vorteil hat diese Grammatik?

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
```

```
char * s;
void A(), P(), Z();
```

```
void S() {
    P();
    if(*s == '+') s++, S();
    if(*s == '-') s++, S();
}
```

```
void P() {
    A();
    if(*s == '*') s++, P();
    if(*s == '/') s++, P();
}
```

```
void A() {
    if(*s == '(') {
        ++s;
        S();
        if(*s == ')') ++s;
        else exit(1);
    }
    else Z();
}
```

```
int main(int argc, char * argv[])
{
    if(argc != 2) exit(1);
    s = argv[1];
    S();
    if(*s != 0) exit(1);
    printf("okay!\n");
    return 0;
}
```