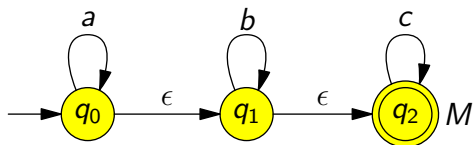
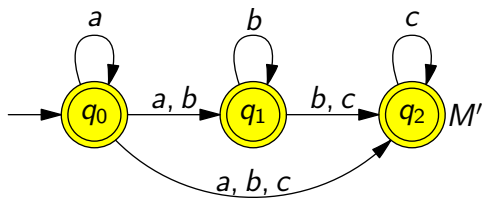


NFAs mit ϵ -Übergängen



Dies ist kein NFA!

Ziel: Erkenne die Sprache $a^*b^*c^*$.



NFA ist komplizierter!

Definition

Ein *NFA mit ϵ -Übergängen* ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- 1 $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$,
- 2 Q, Σ, q_0, F wie bei NFAs.

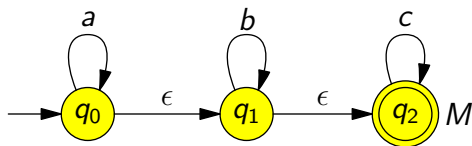
Für $q \in Q$:

$$\begin{aligned} \epsilon\text{-Hülle}(q) := \{ p \in Q \mid & \text{es gibt } q_1, \dots, q_n \\ & \text{mit } q_{i+1} \in \delta(q_i, \epsilon) \text{ für } 1 \leq i < n \\ & \text{und } q = q_1, p = q_n \} \end{aligned}$$

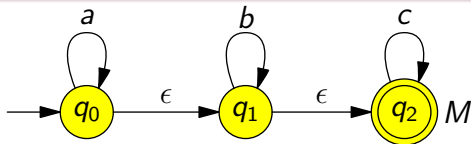
Für $S \subseteq Q$:

$$\epsilon\text{-Hülle}(S) := \bigcup_{q \in S} \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

Beispiel



- ϵ -Hülle(q_0) = $\{q_0, q_1, q_2\}$
- ϵ -Hülle(q_1) = $\{q_1, q_2\}$
- ϵ -Hülle(q_2) = $\{q_2\}$
- ϵ -Hülle($\{q_1, q_2\}$) = $\{q_1, q_2\}$



Definition

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit ϵ -Übergängen.

Es sei $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$.

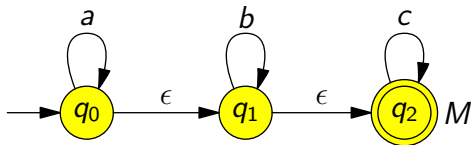
- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q)$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, w)} \epsilon\text{-Hülle}(\delta(p, a))$

Informell:

$\hat{\delta}(q, a)$ sind Zustände, die von q erreichbar sind:

- 1 Zunächst über ϵ -Transitionen
- 2 Dann über eine a -Transition
- 3 Dann über ϵ -Transitionen

Beispiel



- $\delta(q_0, a) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta(q_0, b) = \emptyset$
- $\hat{\delta}(q_0, b) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0, q_1, q_2\}$

Theorem

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit ϵ -Übergängen.
Dann gibt es einen NFA M' mit $L(M') = L(M)$.

Beweis.

$M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$ mit

- $\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$,
- $F' = \{q \in Q \mid \epsilon\text{-H\u00fclle}(q) \cap F \neq \emptyset\}$.

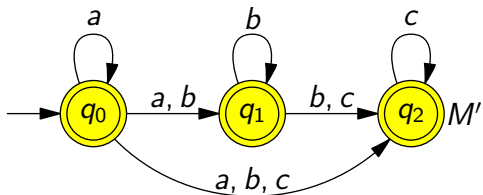
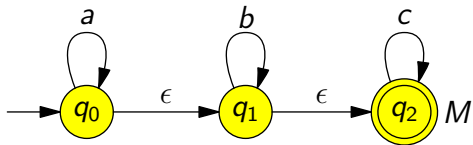


Informell:

$p \in \delta'(q, a)$ gdw. in M gibt es Pfad von q nach p , der

- 1 zunächst mit ϵ beschriftet ist,
- 2 dann einen a -Übergang hat,
- 3 dann wieder mit ϵ beschriftet ist.

Beispiel



Die Thompson-Konstruktion

Gegeben regulärer Ausdruck r .

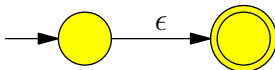
Konstruktion eines NFA M mit $L(M) = L(r)$.

Vorgehen: Induktiv über Aufbau von r .

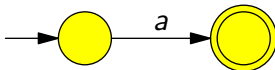
• $r = \emptyset$:



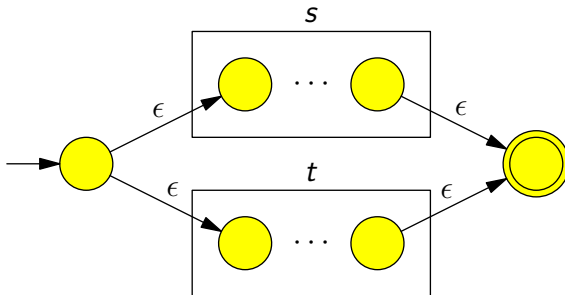
• $r = \epsilon$:



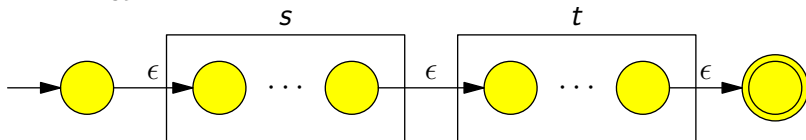
• $r = a$:



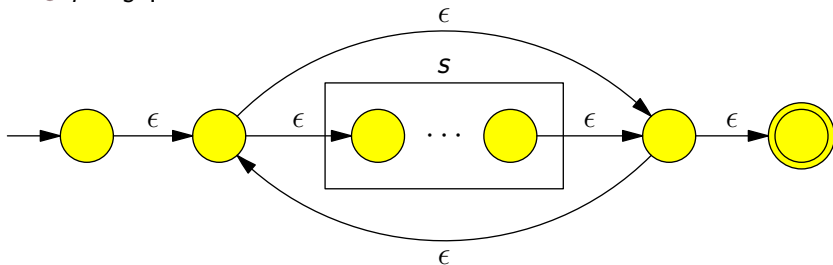
- $r = s + t$:



• $r = st$:



• $r = s^*$:



Theorem

Zu jedem regulären Ausdruck r gibt es einen NFA mit ϵ -Kanten M , so daß $L(M) = L(r)$.

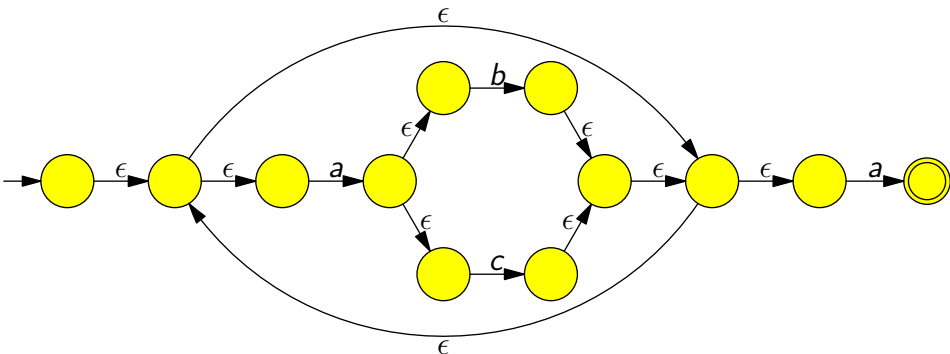
Beweis.

Thompson-Konstruktion.

Korrektheit:

Strukturelle Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke. □

Beispiel



$$(a(b+c))^*a$$

Größe des NFA linear in der Länge des regulären Ausdrucks!

Robustheit regulärer Sprachen

Theorem

DFAs, NFAs, NFAs mit ϵ -Übergängen und reguläre Ausdrücke charakterisieren jeweils die regulären Sprachen.

Beweis.

- 1 regulärer Ausdruck \rightarrow ϵ -NFA: Thompson-Konstruktion
- 2 ϵ -NFA \rightarrow NFA: Eliminierung von ϵ -Kanten
- 3 NFA \rightarrow DFA: Potenzautomat
- 4 DFA \rightarrow regulärer Ausdruck: L_{ij}^k -Konstruktion



Robustheit regulärer Sprachen

Theorem

Die Reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt, Konkatenation, Kleene'scher Hülle, Komplement, Differenz und Homomorphismen.

- Vereinigung: Reguläre Ausdrücke
- Schnitt: DFAs, Produktautomat
- Konkatenation: Reguläre Ausdrücke
- Kleene'sche Hülle: Reguläre Ausdrücke
- Komplement: DFAs
- Differenz: Komplement und Schnitt
- Homomorphismen: Reguläre Ausdrücke

Simulation eines NFA

```
S := { q0};  
while(es gibt noch ein Zeichen) {  
  c := lese Zeichen;  
  H :=  $\emptyset$ ;  
  for(q in S) { H := H  $\cup$   $\delta$ (q, c); }  
  S := H;  
}  
if(S  $\cap$  F  $\neq \emptyset$ ) return 1;  
return 0;
```

Datenstruktur für H :

- Stack (FIFO-Queue) und
- Bitfeld

Laufzeit: $O(|Q| \cdot |w|)$, falls $|\Sigma|$ konstant.

Einige Zwischenfragen

Welche Konstruktionen funktionieren auch für NFAs?

- 1 Komplementäutomat **Nein**
- 2 Produktautomat **Ja**
- 3 L_{ij}^k -Konstruktion **Ja**

Wer hat die Nase vorne? NFA oder DFA?

- 1 Vereinigung zweier Sprachen **NFA**
- 2 Schnitt zweier Sprachen **DFA**
- 3 Konstruktion aus einem regulären Ausdruck **NFA**
- 4 Verwandeln in einen regulären Ausdruck **egal**
- 5 Komplementieren **DFA**
- 6 Simulieren **DFA**
- 7 Größe **NFA**

Die Myhill–Nerode-Relation \equiv_L

Definition

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$.

Definiere $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ vermöge

$$u \equiv_L v \iff uw \in L \iff vw \in L \text{ für alle } w \in \Sigma^*.$$

Der *Index* einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Interessanter Fall: \equiv_L hat endlichen Index.

Beispiel 1

Es sei $L = 0^*1^*$.

- $001 \equiv_L 0111$
- $010 \not\equiv_L 0111$, denn $010 \notin L$, $0111 \in L$.
- $00 \not\equiv_L 00001$, denn $000 \in L$, $000010 \notin L$.

Wieviele Äquivalenzklassen hat \equiv_L ?

Drei:

- 1 0^*
- 2 0^*1^+
- 3 $0^*1^+0(0+1)^*$

Beispiel 2

Was ist der Index von \equiv_L für diese Sprachen?

- 1 $L = \{0, 1\}^*$
- 2 $L = \{ a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl} \}$
- 3 $L = \emptyset$
- 4 $L = \{ w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist Vielfaches von } 7 \}$
- 5 $L = \{3, 3., 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots\}$
- 6 $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$
- 7 $L = \{ a^n b^m \mid n \geq m \geq 0 \}$
- 8 $L = \{ a^n b^m \mid |n - m| < 5 \}$

Lemma (A)

$$L \subseteq \Sigma^* \text{ regulär} \implies \equiv_L \text{ hat endlichen Index.}$$

Beweis.

- 1 L regulär und $L = L(M)$ mit DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- 2 Definiere $u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
- 3 $u \sim v \implies u \equiv_L v$, denn $uw \in L \iff vw \in L$ falls $\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
- 4 Also hat \sim mindestens so viele Äquivalenzklassen wie \equiv_L .
- 5 \sim hat aber endlichen Index.



Lemma (B)

$$L \subseteq \Sigma^* \text{ regulär} \iff \equiv_L \text{ hat endlichen Index.}$$

Beweis.

- 1 $L \subseteq \Sigma^*$ und Index von \equiv_L sei endlich.
- 2 Konstruiere $M = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\equiv_L}, F)$ mit
 - $Q = \{ [w]_{\equiv_L} \mid w \in \Sigma^* \}$
 - $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q, ([w]_{\equiv_L}, a) \mapsto [wa]_{\equiv_L}$
 - $F = \{ [w]_{\equiv_L} \mid w \in L \}$
- 3 Q endlich, da Index von \equiv_L endlich.
- 4 δ wohldefiniert, da $[u]_{\equiv_L} = [v]_{\equiv_L} \Rightarrow [ua]_{\equiv_L} = [va]_{\equiv_L}$
- 5 $L(M) = L$, da $\hat{\delta}([\epsilon]_{\equiv_L}, w) = [w]_{\equiv_L}$.



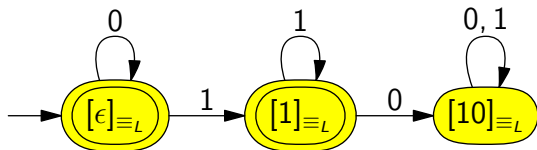
Beispiel

Es sei $L = 0^*1^*$.

\equiv_L hat die Äquivalenzklassen

- 1 $[\epsilon]_{\equiv_L} = 0^*$,
- 2 $[1]_{\equiv_L} = 0^*1^+$ und
- 3 $[10]_{\equiv_L} = 0^*1^+0(0 + 1)^*$.

Der Myhill–Nerode–Automat:



Der Satz von Myhill–Nerode

Theorem

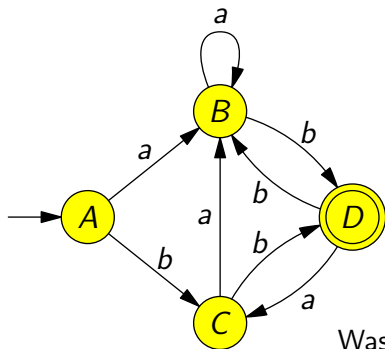
- 1 $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann regulär, wenn \equiv_L endlichen Index hat.
- 2 M ein DFA $\implies \sim_M$ ist eine Verfeinerung von $\equiv_{L(M)}$.
- 3 Es gibt zu jeder regulären Sprache $L \in \Sigma^*$ einen bis auf Isomorphie eindeutigen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(M)$.

Beweis.

- 1 Folgt aus Lemma A und B.
- 2 Beweis von Lemma A: $u \sim v \implies u \equiv_L v$.
- 3 Da \sim eine Verfeinerung von \equiv_L ist, muß $\sim = \equiv_L$ gelten, wenn ihre Indexe gleich sind.



Beispiel



Was sind die Äquivalenzklassen von \sim ?

Natürlich $[\epsilon]_{\sim}$, $[a]_{\sim}$, $[b]_{\sim}$ und $[ab]_{\sim} \dots$

Was sind die Äquivalenzklassen von $\equiv_{L(M)}$?

Es sind $[\epsilon]_{\sim}$, $[a]_{\sim} \cup [b]_{\sim}$ und $[ab]_{\sim}$.