

Definition

Eine linkslineare Grammatik ist ein kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \rightarrow aB$, $C \rightarrow b$ und $D \rightarrow \epsilon$ mit $A, B, C, D \in N$ und $a, b \in T$.

Theorem

Linkslineare Grammatiken erzeugen genau die regulären Sprachen.

Lemma

Jede linkslineare Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache.

Beweis.

Konstruiere den Kellerautomaten zu einer linkslinearen Grammatik.

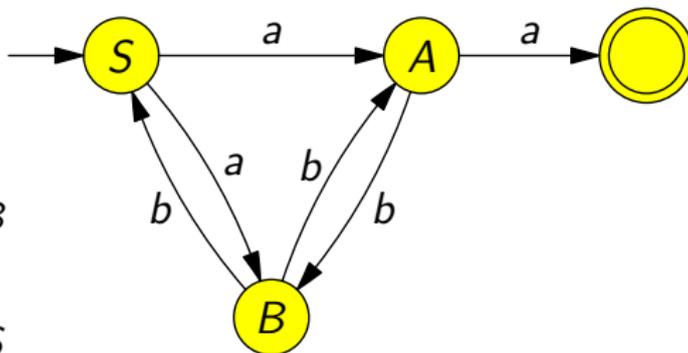
Der Keller kann nie mehr als ein Symbol enthalten.

Ein endlicher Automat kann also den Kellerautomaten simulieren.



Beispiel

$S \rightarrow aA \mid aB$
 $A \rightarrow a \mid bB$
 $B \rightarrow bA \mid bS$



Lemma

Jede reguläre Sprache wird durch eine linkslineare Grammatik erzeugt.

Beweis.

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.

Definiere die Grammatik $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit den Produktionen

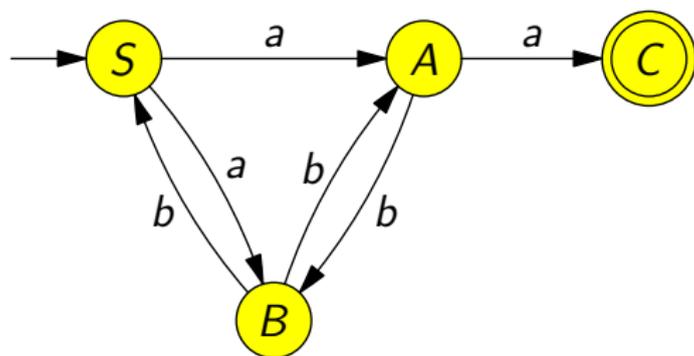
- 1 $q \rightarrow ap$ falls $p \in \delta(q, a)$ und
- 2 $q \rightarrow \epsilon$ falls $q \in F$.

Mit Induktion über $|w|$:

$p \in \hat{\delta}(w, q_0)$ gdw. $q_0 \xrightarrow{*} wp$.



Beispiel



$$S \rightarrow aA \mid aB$$

$$A \rightarrow aC \mid bB$$

$$B \rightarrow bA \mid bS$$

$$C \rightarrow \epsilon$$

Kontextsensitive Sprachen sind eine echte Obermenge der kontextfreien Sprachen:

$$L = \{ \$w\$w\$ \mid w \in \{a, b\}^* \}$$

$$S \rightarrow LMR$$

$$M \rightarrow AM\bar{A} \mid BM\bar{B} \mid \$$$

$$\bar{A}A \rightarrow A\bar{A}, \quad \bar{A}B \rightarrow B\bar{A}$$

$$\bar{B}A \rightarrow A\bar{B}, \quad \bar{B}B \rightarrow B\bar{B}$$

$$\bar{A}R \rightarrow AR, \quad \bar{B}R \rightarrow BR$$

$$L \rightarrow \$$$

$$R \rightarrow \$$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

Theorem

Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen ist nicht entscheidbar.

Beweis.

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$S \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R$$

$$M \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R \mid D$$

$$\vdots$$

(Rest der Grammatik: Übungsaufgabe)

Sprache ist leer gdw. I keine Lösung hat.



Theorem

Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar.

Beweis.

Es sei G eine kontextsensitive Grammatik und w ein Wort.

Wende Regeln rekursiv rückwärts auf alle möglichen Arten an.

Wir erhalten so alle α mit $\alpha \xRightarrow{*} w$.

Ist das Startsymbol darunter?

Terminierung: $|\alpha| \leq |w|$ falls $\alpha \xRightarrow{*} w$. □

Theorem

Das Wortproblem für Chomsky-0-Sprachen ist nicht entscheidbar.

Beweis.

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$S \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R$$

$$M \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R \mid D$$

$$0D0 \rightarrow D$$

$$1D1 \rightarrow D$$

$$D \rightarrow \epsilon$$

