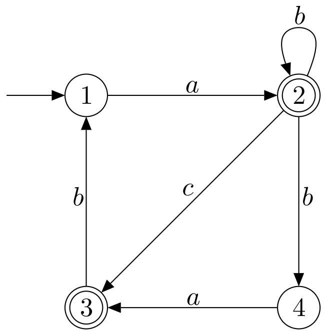
Datum: 11.05.2020

Übungsblatt mit Lösungen 05

Aufgabe T15

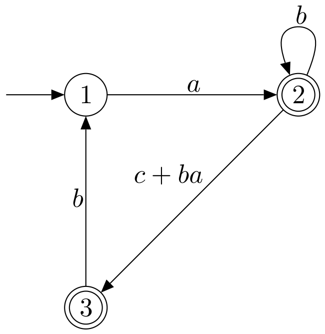
Verwenden Sie die Methode der Zustandseliminierung um einen regulären Ausdrück für die Sprache des folgenden Automaten zu konstruieren:



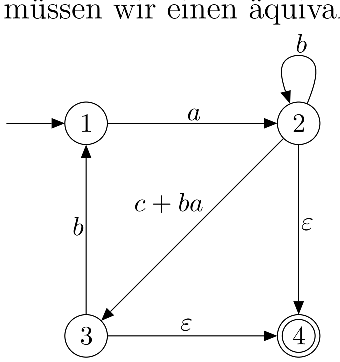
Hinweis: Wir empfehlen zunächst den Zustand 4 zu eliminieren. Dann könnten Sie sich darum kümmern, dass es nur einen Endzustand gibt, was zum Beispiel durch Hinzufügen eines neuen Zustands möglich ist. Dann denken Sie nach, ob Sie 2 oder 3 eliminieren sollten.

Lösungsvorschlag

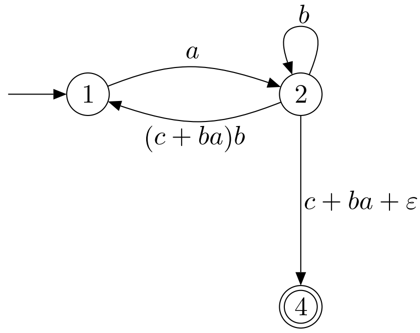
Wir eliminieren zunächst den Zustand 4:



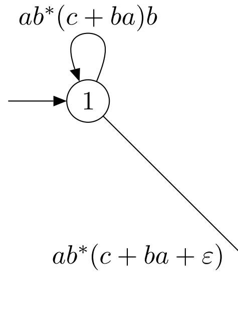
Der Automat hat mehrere Endzustände, aber wir können keine Endzustände eliminieren. Daher müssen wir einen äquivalenten Automaten mit nur einen Endzustand erstellen:



Jetzt eliminieren wir den Zustand 3:



Schliesslich eliminieren wir noch den Zustand 2:



Jetzt können wir leicht einen regulären Ausdruck ablesen:

$$(ab^*(c+ba)b)^*ab^*(c+ba+\varepsilon)$$

Falls wir die L_{ij}^k-Methode anwenden, kommen wir auch zum Ziel, aber der reguläre Ausdruck ist länger.

$$
a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*c)(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*b+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*c+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*c)(\varepsilon+
((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+
b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+
b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(b+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*b)))(\varepsilon+(a+a(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+
((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+
(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+
b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+
(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+
((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*c))))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+
(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+
(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+
(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(b+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*b)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+
((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+
(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+
(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+
(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+
((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(b+
(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*b))))^*(a(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+
b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+
(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+
((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*c)))^*((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+
a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*((b+
b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))))+(a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*c+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+
b)^*c)(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+
b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+
b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*b+((a+a+(a+a)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*c+((a+a+(a+a)(\varepsilon+
b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b)^*c)(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+
b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+
b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+
b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(b+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*b)))(\varepsilon+(a+a(\varepsilon+((b+b)(a+a)+
((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+
b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+
$$

$(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+$
$(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+$
$(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+$
$b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+$
$((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+$
$(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+$
$(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+$
$b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+$
$b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(((b+b)(a+a)+$
$((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(b+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))^*b)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+$
$(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+$
$(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+$
$(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+$
$b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+$
$((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+$
$(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+$
$b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(b+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*b))))^*(a+a(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+$
$b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+$
$a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+$
$((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+$
$b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+$
$b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+$
$b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c)+(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+$
$b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+$
$b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))^*(\varepsilon+((b+b)(a+a)+((b+$
$b)(a+a))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b)))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*(c+(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))(\varepsilon+b+(\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^*(\varepsilon+b))^*c))))$

Aufgabe T16

Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um zu zeigen, dass folgende Sprachen nicht regulär sind:

a) $w \in \{\text{if}, \text{then}, \text{else}, \text{fi}, A\}^*$, wobei w einen korrekten bedingten Ausdruck darstellt. Hierbei soll A einen primitiven Ausdruck verkörpern.

   Beispielsweise ist

   if A then A else if A then A else A fi fi

   korrekt, aber

   A then if else A fi fi

   ist aus vielerlei Gründen nicht korrekt.

b) Die korrekten arithmetischen Ausdrücke mit natürlichen Zahlen und den vier Grundrechenarten, z.B. $(4 + 23) \times (3 - 18)$.

c) Die korrekten arithmetischen Ausdrücke mit natürlichen Zahlen und Addition sowie Subtraktion, aber ohne Klammern, deren Ergebnis positiv ist.

   Beispiel: $23 - 40 + 23 - 1 - 1 - 1 + 5$

Lösungsvorschlag

a) Beweis durch Widerspruch. Sei die Sprache der korrekten bedingten Ausdrücke regulär. Dann gibt es nach dem Pumping-Lemma eine Zahl n mit den beschriebenen Eigenschaften. Sei $w = \text{if}^n\text{A}(\text{then A fi})^n$ und $xyz = w$ eine beliebige Zerlegung von w mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Somit ist xy ein Präfix von if^n und xy^2z kann kein korrekter bedingter Ausdruck sein, da er unterschiedliche Anzahlen von if und fi enthält.

b) Analog zu oben, sei $w = ({}^n1[+1)]^n$. Somit gilt für jede Zerlegung $xyz = w$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$, dass xy ein Präfix von $({}^n$ ist. Somit ist xy^2z kein korrekt geklammerter Ausdruck, da sich die Zahl der öffnenden und schließenden Klammern unterscheiden.

c) Angenommen, die Sprache L_c dieser Aufgabe sei regulär. Nach Pumping-Lemma existiert dann ein $n \in \mathbf{N}$, sodass für alle $w \in L_c$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung $w = xyz$ existiert, mit $|xy| \leq n$, $|y| \geq 1$ und $xy^kz \in L_c$ für alle $k \in \mathbf{N}$.

Sei $w = 1^n - 1^n + 1$. Wertet man diesen Ausdruck aus, so ergibt sich 1, also ist w in der Sprache enthalten. Außerdem ist $|w| > n$.

Sei $xyz = w$ eine beliebige Zerlegung von w mit $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$. Dann ist $xy^0z = xz = 1^{n-|y|} - 1^n + 1$. Aber xz nicht in L_c, da der zugehörige Wert kleiner als 1 ist. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage des Pumping-Lemmas, also ist L_c nicht regulär.

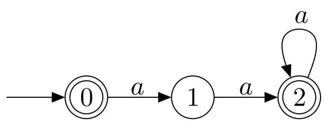
Aufgabe T17

Es sei L ein reguläre Sprache mit der besonderen Eigenschaft, dass sie unter der Anwendung einer Kleeneschen Hülle abgeschlossen ist. Mit anderen Worten, es gilt $L = L^*$.

Beweisen oder widerlegen Sie: *Der minimale DFA für L hat genau einen Endzustand.*

Lösungsvorschlag

Die Aussage gilt nicht. Betrachte $L = \epsilon + aa^+$. Der minimale DFA hat mehr als einen Endzustand:



Aufgabe H13 (10 Punkte)

Gegeben sei eine reguläre Sprache L – die Sie nicht kennen – über einem Alphabet Σ, und ein Blackbox-Algorithmus, der wie folgt funktioniert. Wenn Sie dem Algorithmus zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ geben, gibt dieser `gleich` aus, wenn die beiden Wörter in der gleichen Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse von L sind, sonst gibt er `unterschiedlich` aus.

Ihre Aufgabe ist es nun, einen Algorithmus anzugeben, der genau einen Repräsentanten jeder Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse von L ausgibt. Beweisen Sie, dass ihr Verfahren korrekt ist.

Lösungsvorschlag

Unser Algorithmus arbeitet wie folgt: Wir konstruieren iterativ alle Wörter über Σ einer festen Wortlänge. Wenn z.B. also $\Sigma = \{a, b\}$ sei, würde unser Algorithmus folgende Wortmengen konstruieren: $\{\varepsilon\}, \{a, b\}, \{aa, ab, ba, bb\}, \ldots$. Wann immer wir ein neues Wort w generieren (mit Ausnahme von ε), geben wir dieses paarweise mit allen bisher generierten Wörtern in unseren Blackboxalgorithmus. Sofern die Blackbox für w kombiniert mit allen anderen Wörtern stets `unterschiedlich` ausgibt, merken wir uns w in einer Menge R als Repräsentanten einer neuen Äquivalenzklasse.

Unser Algorithmus terminiert, sobald für eine feste Wortlänge kein einziges generiertes Wort nach unserem Kriterium als neuer Repräsentant erkannt wurde. $R \cup \varepsilon$ entspricht dann genau der Forderung in der Aufgabenstellung.

Beweis der Korrektheit: R enthält niemals mehr als einen Repräsentanten einer Äquivalenzklasse, da wir dies durch den Vergleich mit allen bisher generierten Wörtern - also insbesondere den bereits gefundenen Repräsentanten - durch unseren Blackboxalgorithmus hätten feststellen müssen. Es bleibt noch zu zeigen, dass R tatsächlich einen Repräsentanten aller Äquivalenzklassen von L enthält.

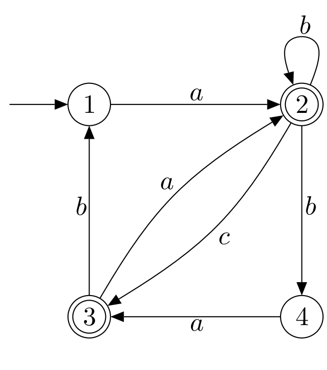
Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es eine Äquivalenzklasse, deren kürzester Repräsentant v die Länge $|v| = m$ hat, jedoch alle Wörter der Länge $m-i$ mit $i > 0$ (die Wortlänge, zu der unser Verfahren terminierte) von uns nicht als neue Repräsentanten identifiziert wurden, d.h. bereits Teil von bekannten Äquivalenzklassen sind.

Dies reicht bereits aus, um einen Widerspruch zu zeigen: Wir wissen, dass wir alle Präfixe der Länge bis zu $m - i$ von den Wörtern der Länge m aufgezählt haben, insbesondere alle Präfixe der Länge $m - i$. Für jeden Präfix der Länge $m - i$ und jeweils eine bereits gefundene Äquivalenzklasse gilt also folgendes: Nach der Definition der Myhill-Nerode-Definition gilt für jedes Wort u, welches wir an einen Präfix der Länge $m - i$ anhängen können, dass das kombinierte Wort Teil der Äquivalenzklasse bleibt, sich also nicht trennen lässt.

Insbesondere fallen also auch die Worte der Länge m - die wir aus dem Präfix der Länge $m - i$ und einem Wort u der Länge i zusammensetzen können - mit bestehenden Äquivalenzklassen zusammen. Es kann also keine weiteren Äquivalenzklassen geben.

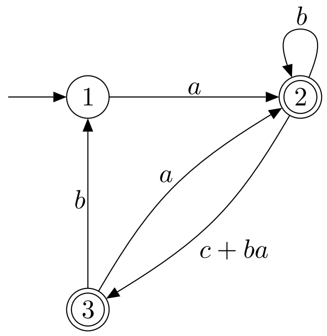
Aufgabe H14 (11 Punkte)

Verwenden Sie die Methode der Zustandseliminierung um einen regulären Ausdrück für die Sprache des folgenden Automaten zu konstruieren:

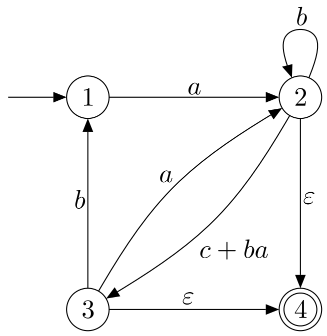


Gehen Sie schrittweise vor und zeichnen Sie alle Zwischenschritte.
Beachten Sie auch den Hinweis in der ähnlichen Aufgabe T15.

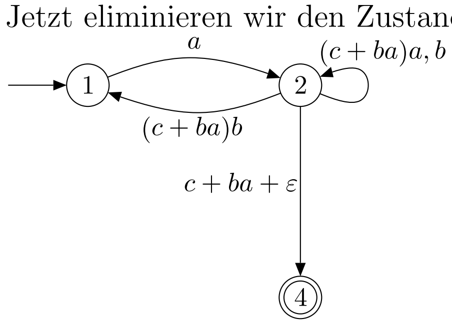
Lösungsvorschlag
Wir eliminieren zunächst den Zustand 4:



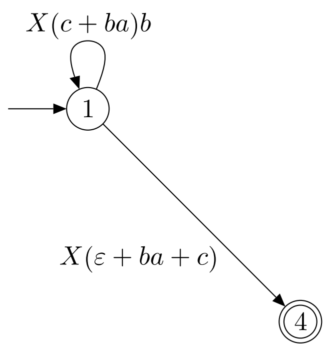
Der Automat hat mehrere Endzustände, aber wir können keine Endzustände eliminieren. Daher müssen wir einen äquivalenten Automaten mit nur einen Endzustand erstellen:



Jetzt eliminieren wir den Zustand 3:



Schließlich eliminieren wir noch den Zustand 2:



Hier ist $X = a(b + (c + ba)a)^*$.
Jetzt können wir leicht einen regulären Ausdruck ablesen:

$$
\begin{aligned}
&[X(c + ba)b]^* X(\varepsilon + ba + c) \\
=&[a(b + (c + ba)a)^*(c + ba)b]^* a(b + (c + ba)a)^*(\varepsilon + ba + c)
\end{aligned}
$$

Aufgabe H15 (9 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

a) Wörter, die gleich viele a's und b's enthalten

b) Wörter, deren Länge eine Fibonaccizahl ist

c) $\{ abca^n b^m cba \mid m \leq n \}$

Lösungsvorschlag

a) Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass L_a regulär ist. Sei $n \in \mathbf{N}$ beliebig. Betrachte das Wort $w = a^n b^n \in L_a$, welches $|w| = 2n \geq n$ erfüllt. Sei $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$, $|y| > 0$ eine beliebige Zerlegung. Hier gilt $xy = a^{|xy|}$. Dann ist nach Pumping-Lemma auch $xy^0 z = a^{n-|y|} b^n \in L_a$. Ein Widerspruch.

b) Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass L_b (über dem Alphabet a) regulär ist. Sei $n \in \mathbf{N}$ beliebig. Betrachte das Wort $w = a^{f(n+10)} \in L_b$ wobei $f(n)$ die n-te Fibonacci-Zahl ist, welches $|w| = |f(n+10)| > n$ erfüllt. Sei $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$, $|y| > 0$ eine beliebige Zerlegung. Dann ist nach Pumping-Lemma auch $xy^2 z = a^{|w|-|y|}, xy^3 z = a^{|w|-|y|} \in L_b$. Wir beobachten, dass $f(m+2) > f(2m)$. Da $xy^3 z$ höchstens doppelt so lang ist wie $xy^2 z$, welches wiederum doppelt so lang ist we xyz, folgt, dass $f(n+12) = xy^3 z$, $f(n+11) = xy^2 z$. Dann $f(n+12) = f(n+11) + |y| \leq f(n+11) + n < f(n+11) + f(n+10)$ im Widerspruch zu der Definition der Fibonacci-Zahlen.

c) Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass L_c regulär ist. Sei $n \in \mathbf{N}$ beliebig. Betrachte das $w = abc\ a^{n'} b^{n'} cba \in L_c$ wobei $n' = \max\{0, n-4\}$, welches $|w| \geq n$ erfüllt. Sei $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$, $|y| > 0$ eine beliebige Zerlegung. Nach Pumping-Lemma ist auch $xy^2 z \in L_c$. Dann hat y entweder die Form $y \in \{a,b,c\}^* ab^t$ oder $y = b^t$. Falls y die Form $y \in \{a,b,c\}^* ab^t$ hat, dann $xy^2 z \in abc\ \{a,b,c\}^* ab\ cba$, im Widerspruch zu $xy^2 z \in L_c$. Folglich ist $y = b$. Dann aber ist $xy^2 = abc\ a^{n'} b^{m'}\ cba$ für ein $m' > n'$, in L_c. Widerspruch.