Datum: 20.04.2020

Übungsblatt mit Lösungen 02

Aufgabe T5

Wir nehmen an, dass die Sprache $L = \{ a^n b^m \mid m \geq n \geq 0 \}$ nicht regulär ist. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme auch die folgenden Sprachen nicht regulär sind, indem Sie Abschlußeigenschaften regulärer Sprachen verwenden.

1. $L_1 = \{ b^n a^m \mid m \geq n \geq 0 \}$
2. $L_2 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$
3. $L_3 = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$
4. $L_4 = \{ a^m b^n \mid m \geq n \geq 0 \}$
5. $L_5 = \{ a^{2n} b^n \mid n \geq 0 \}$

Lösungsvorschlag

Im folgenden sei $h\colon \Sigma \to \Sigma^*$ eine Umbenennung von Buchstaben in Wörter. Die Erweiterung von h über Wörtern $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$, $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ mit $h(\epsilon) := \epsilon$ und $h(aw) := h(a)h(w)$ ist dann ein Homomorphismus. Über einer Sprache L sei h definiert als $h(L) := \{ h(w) \mid w \in L \}$.

1. Angenommen L_1 sei regulär. Sei h definiert durch $h(a) := b$ und $h(b) := a$. Dann ist $h(L_1) = \{ a^n b^m \mid m \geq n \geq 0 \} = L$. Widerspruch, da reguläre Sprachen unter Homomorphismen abgeschlossen sind.

2. Angenommen L_2 sei regulär. Dann ist auch $L_2 b^* = L$ regulär, da reguläre Sprachen unter Konkatenation abgeschlossen sind. Widerspruch.

3. Sei $h(a) := a$, $h(b) := b$ und $h(c) := \epsilon$. Dann gilt $h(L_3) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \} = L_2$. Widerspruch.

4. Durch Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke läßt sich sofort zeigen, dass reguläre Sprachen unter $\cdot^R$ abgeschlossen sind. Es gilt aber $L_4^R = \{ b^n a^m \mid m \geq n \geq 0 \} = L_1$. Widerspruch.

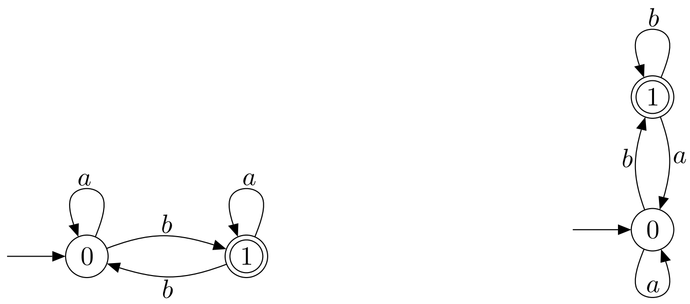
5. Sei $h(a) = a$ und $h(b) = bb$. Dann gilt:

   - $h(L_5) = \{ a^{2n} b^{2n} \mid n \geq 0 \}$
   - $ah(L_5)b = \{ a^{2n+1} b^{2n+1} \mid n \geq 0 \}$

   Somit ist $ah(L_5)b \cup h(L_5) = L_2$. Widerspruch.

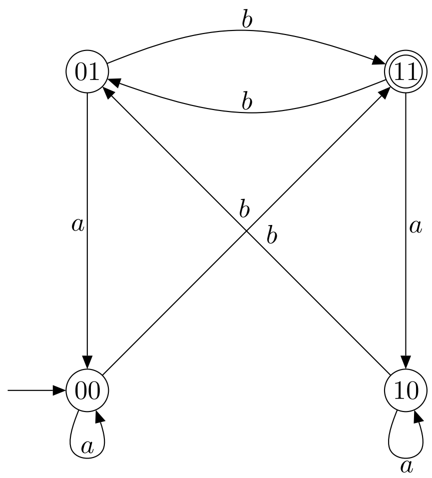
Aufgabe T6

Gegeben sind diese beiden DFAs:



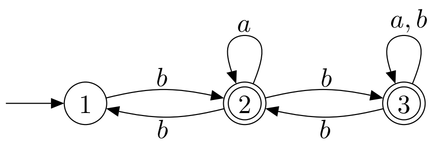
Konstruieren Sie den Produktautomaten.

Lösungsvorschlag

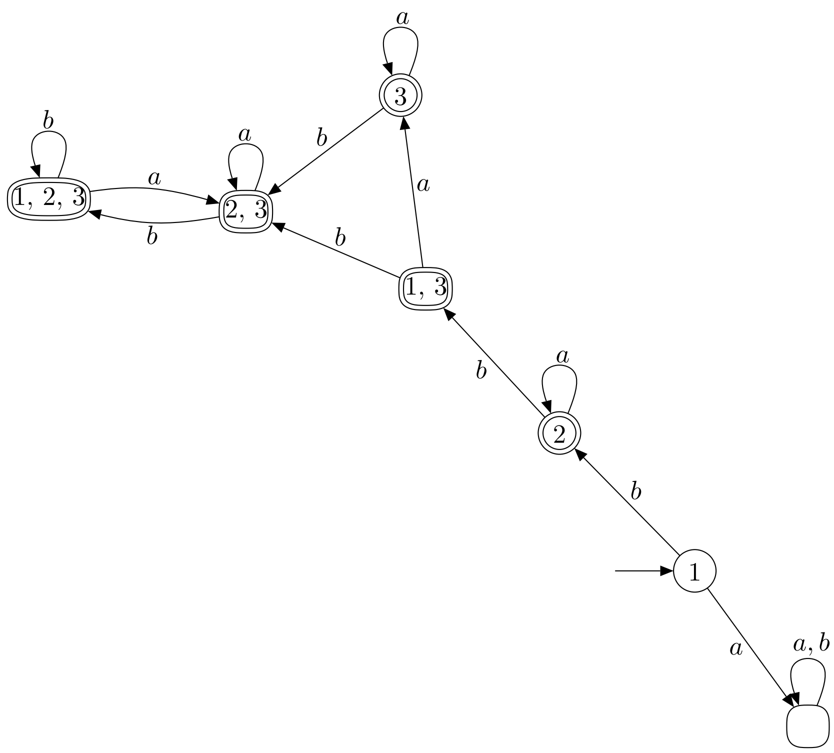


Aufgabe T7

Führen Sie die Potenzmengenkonstruktion auf folgendem NFA aus. Zeichnen Sie den resultierenden DFA. Nicht erreichbare Zustände können Sie weglassen.



Lösungsvorschlag


a
3
b
b
a
1, 2, 3
a
2, 3
b
b
a
1, 3
b
a
2
b
1
a
a, b

Aufgabe T8
Wir betrachten einen Aufzug, der über folgende Abläufe verfügt: R (Notruf auslösen), A (Türe öffnet sich), Z (Türe schließt sich), U (Aufzug fährt einen Stock nach oben) und D (Aufzug fährt einen Stock nach unten). Es gibt vier Etagen und zu Beginn steht der Aufzug mit geschlossener Tür im Erdgeschoss.

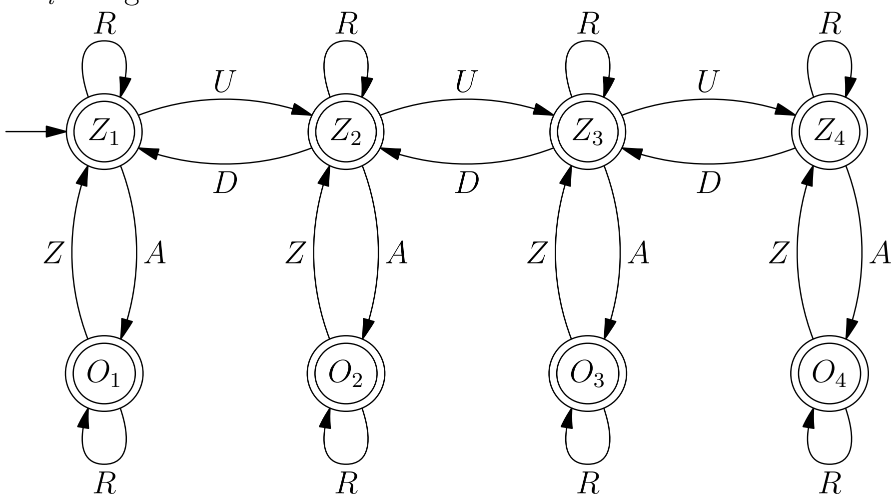
a) Geben sie eine informelle Beschreibung der (sinnvollen) möglichen Abläufe, wie Sie sie z.B. als Spezifikation an einen Hersteller geben würden.

b) Geben Sie die Spezifikation aus a) als DFA an.

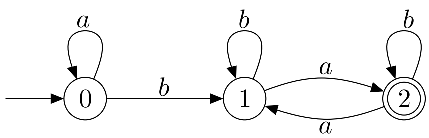
Lösungsvorschlag

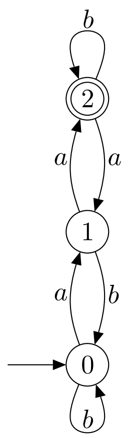
a) Der Aufzug sollte nur mit geschlossener Türe fahren können. Im untersten Stockwerk, darf man nicht nach unten fahren und im obersten nicht nach oben. Ein Notruf sollte jederzeit möglich sein.

b) In folgender Zeichnung fehlt der *Fangzustand*, zu welchen alle Transitionen führen, die nicht eingezeichnet sind. Zum Beispiel fehlt von Z_4 ein abgehender Pfeil, der mit U beschriftet ist. Dieser muß natürlich vorhanden sein und führt hier zum Fangzustand. Der Zustand O_i modelliert die Situation, dass der Aufzug im $i$ten Stockwerk mit offener Türe steht und Z_i mit geschlossener.



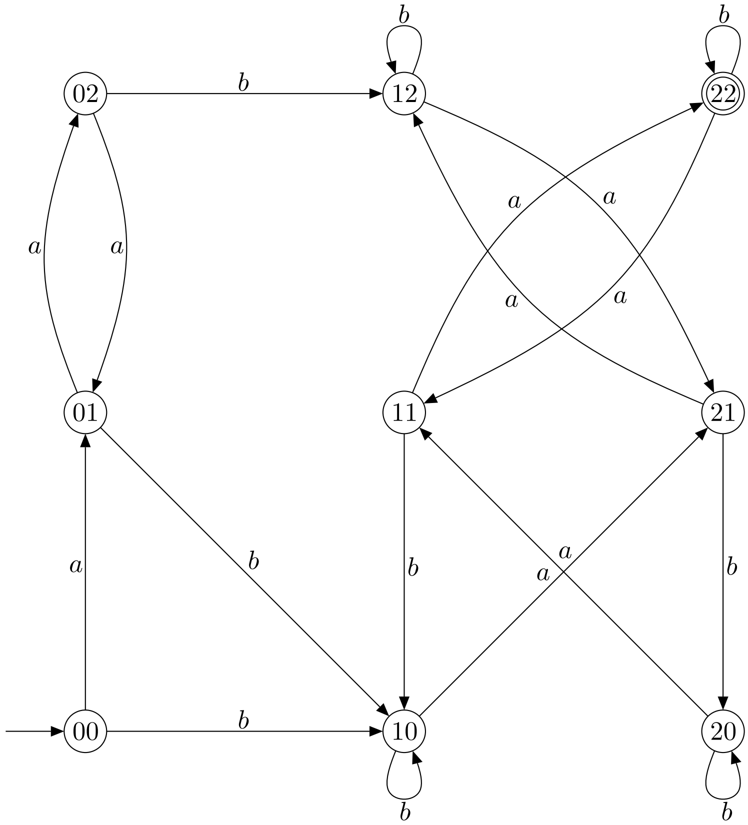
Aufgabe H4 (10 Punkte)
Gegeben sind diese beiden DFAs:





Konstruieren Sie den Produktautomaten.

Lösungsvorschlag



Aufgabe H5 (10 Punkte)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $a \in \Sigma$. Der deterministische endliche Automat A erkenne die Sprache aL. Beweisen Sie, dass dann ein DFA B existiert, der die Sprache L erkennt.

Lösungsvorschlag

Sei $A := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ der deterministische endliche Automat, der die Sprache aL erkennt.

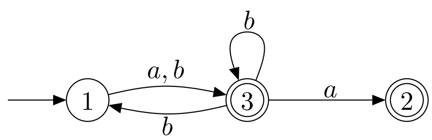
Wir definieren B wie folgt: $B := (Q, \Sigma, \delta, q_0', F)$ mit, $q_0' = \delta(q_0, a)$ (dieser ist eindeutig, da es sich um einen DFA handelt). Zu beachten ist dabei, dass durchaus $q_0 = q_0'$ gelten kann, falls $\delta(q_0, a) = q_0$. Dann erkennt der DFA B die Sprache L.

Beweis: Sei $aw \in L(A)$, d.h. es gilt $\hat{\delta}(q_0, aw) \in F$. Somit gilt $\hat{\delta}(\delta(q_0, a), w) \in F$ und damit, da per Konstruktion $q_0' = \delta(q_0, a)$, $\hat{\delta}(q_0', w) \in F$. Somit akzeptiert B das Wort w.

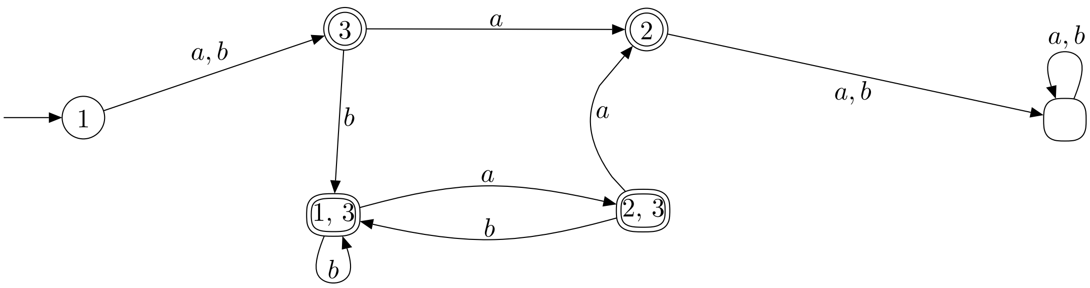
Andererseits, sei $aw \notin L(A)$. Dann gilt $\hat{\delta}(q_0, aw) \notin F$. Per Konstruktion gilt dann allerdings auch $\hat{\delta}(q_0', w) \notin F$.

Aufgabe H6 (10 Punkte)

Führen Sie die Potenzmengenkonstruktion auf folgendem NFA aus. Zeichnen Sie den resultierenden DFA. Nicht erreichbare Zustände können Sie weglassen.



Lösungsvorschlag


a, b
a
b
a
a
b
b
a, b
a, b
1
3
2
1, 3
2, 3