Datum: 13.04.2020

Übungsblatt mit Lösungen 01

Aufgabe T1

Sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Wenn wir das Wort w rückwärts schreiben, so nennen wir es w^R. Das ist aber keine anständige Definition.

1. Definieren Sie die Abbildung $\cdot^R$ formal.
2. Ist $w \mapsto w^R$ ein Homomorphismus?

Lösungsvorschlag

1. Wir definieren für das leere Wort $\varepsilon^R = \varepsilon$ und
$$(aw)^R = w^R a$$
für Symbol $a \in \Sigma$ und Wort $w \in \Sigma^*$.

   Alternativ: Bei einem freien Monoid $(\Sigma^*, \cdot)$ hat jedes Wort w eine eindeutige Darstellung $w = c_1 \cdot \dots \cdot c_n$ mit $c_i \in \Sigma$. Somit läßt sich die Umkehrung definieren als $w^R := c_n \cdot \dots \cdot c_1$.

2. Falls $|\Sigma| = 1$, dann gilt o.B.d.A. $\Sigma = \{a\}$. Somit gilt $w^R = (w_1 \dots w_n)^R = (a \dots a)^R = a^R \dots a^R = w$. Allerdings, für $|\Sigma| > 1$, wähle $a, b \in \Sigma$, $a \neq b$. Dann gilt $(ab)^R = ba$, aber $a^R b^R \neq (ab)^R$. Somit ist $w \mapsto w^R$ kein Homomorphismus.

Aufgabe T2

Es sei $L = a^*b(c^*(a+b))^*$. Was ist $\emptyset^* L(L\emptyset + \varepsilon)^*$?

Lösungsvorschlag

Sei S irgendeine Sprache. Das sind die relevanten Regeln:

$$\emptyset^* = \varepsilon \qquad L\emptyset = \emptyset \qquad L\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon L.$$

Wenn wir diese Regeln anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}\emptyset^* L(L\emptyset + \varepsilon)^* &= \varepsilon L(\emptyset + \varepsilon)^* \\ &= L\varepsilon^* = L.\end{aligned}$$

Aufgabe T3

Wir verwenden das Alphabet $\{a, b\}$ und definieren uns den Homomorphismus h vermöge

$$h\colon a \mapsto b,\ b \mapsto ab.$$

Was ist $h(h(h(h(a))))$?

Lösungsvorschlag

$$h(h(h(h(a)))) = h(h(h(b))) = h(h(h(b))) = h(h(ab)) = h(baba) = abbab$$

und weiter

$$h(h(h(h(b)))) = h(abbab) = bababbab.$$

Aufgabe T4

Finden Sie einen regulären Ausdruck, dessen Sprache alle Wörter in den beiden linken Spalten enthält und keines der Wörter in der rechten Spalte.

babcb	*bbaa*	*cbbbcaaac*
aabcbcb	*abcb*	*ccbcccacb*
baabbccaac	*accaa*	*cacbaacc*
bbbbaa	*abacaca*	*accbaaca*
ccac	*abcaacbcc*	*cbccbacbcb*
bbaacacc	*baccacaab*	

Lösungsvorschlag

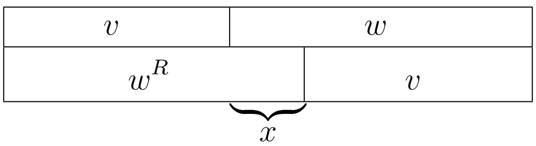
Unser Vorschlag ist $(a+b)^*(a+c)^*(b+c)^*$. Es gibt natürlich unendlich viele richtige Lösungen. Die faulste Lösung ist $babcb + aabcbcb + baabbccaac + bbbbaa + ccac + bbaacacc + abcaaaaca + bbaa + abcb + accaa + abacaca + abcaacbcc + baccacaab$.

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Gegeben seien $v, w \in \Sigma^*$ mit $vw = w^R v$, und $|w| \geq |v|$.
Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann $(vw)^R = vw$ gilt.

Lösungsvorschlag

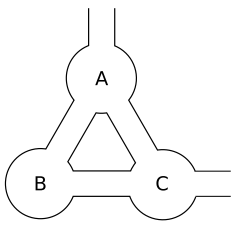
Wegen $vw = w^R v$ und $|w| \geq |v|$ existiert ein $x \in \Sigma^*$ mit $w = xv$ und $w^R = vx$.



Dann gilt aber auch $xv = w = (w^R)^R = (vx)^R = x^R v^R$. Also ist insbesondere $v = v^R$. Daraus folgt dann leicht

$$vw = w^R v = w^R v^R = (vw)^R.$$

Aufgabe H2 (10 Punkte)



Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der jeden (nicht leeren) Pfad durch das nebenstehende Museum beschreibt. Dabei startet ein Pfad im Raum A und endet in Raum C. Beispielsweise wäre ABCABAC ein gültiger Pfad aber ABBAC oder A nicht.

Lösungsvorschlag

Anschaulich können wir einen Weg durch das Mini-Atomium folgendermaßen gliedern: Nach $H_0 = AC + ABC$ erreichen wir zum ersten mal Raum C. Dann kehren wir immer wieder in den Raum C zurück und bewegen uns dazwischen zwischen den Räumen A und B. Letzteres läßt sich durch den regulären Ausdruck

$$H = (BA)^+ + (BA)^*B + (AB)^+ + (AB)^*A$$

beschreiben. Die vier Teile entsprechen den Wegen, die

1. in B beginnen und in A enden,
2. in B beginnen und in B enden,
3. in A beginnen und in B enden und
4. in A beginnen und in A enden.

Der gesamte reguläre Ausdruck ist dann

$$H_0(HC)^* = (AC + ABC) + \left[\Big((BA)^+ + (BA)^*B + (AB)^+ + (AB)^*A\Big)C\right]^*$$

Aufgabe H3 (10 Punkte)

Es sei wieder h der Homomorphismus aus der Aufgabe T3.
Welche Sprache wird durch $h(\{a,b\}^*)$ beschrieben? Geben Sie dafür die resultierende Sprache als regulären Ausdruck an und beschreiben Sie diese umgangssprachlich. Leiten Sie einen regulären Ausdruck für $h(h(\{a,b\}^*))$ her.
Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag

Für alle Wörter $w' \in h(\{a,b\}^*)$ gilt $w' = h(w)$ für ein $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$. Da h ein Homomorphismus ist, gilt $w' = h(w_1 \dots w_n) = h(w_1) \dots h(w_n)$. Für $w_i \in \{a,b\}$ gilt $h(w_i) \in \{ab, b\}$. Also ist $h(\{a,b\}^*) = (ab+b)^*$.
Nach analoger Überlegung gilt $h(h(\{a,b\}^*)) = h((ab+b)^*) = (bab+ab)^*$.
Umgangssprachlich sind $(ab+b)^*$ die Wörter, die kein aa enthalten. Umgangssprachlich sind $(bab+ab)^*$ die Wörter, die weder aa noch bbb enthalten.