Wiederholungsübung FoSAP

24. Juli 2017

Reguläre Ausdrücke

Definition

Es sei Σ ein Alphabet.

Reguläre Ausdrücke

Definition

Es sei Σ ein Alphabet.

1. $\emptyset$, ε und a für $a \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.

Reguläre Ausdrücke

Definition

Es sei Σ ein Alphabet.

1. $\emptyset$, ε und a für $a \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
2. rs ist ein regulärer Ausdruck, falls r und s reguläre Ausdrücke sind.
3. $r + s$ ist ein regulärer Ausdruck, falls r und s reguläre Ausdrücke sind.
4. r^* ist ein regulärer Ausdruck, falls r ein regulärer Ausdruck ist.

Die Sprache eines regulären Ausdrucks

Definition

Wir ordnen jedem regulärer Ausdruck r seine *Sprache* $L(r)$ zu:

Die Sprache eines regulären Ausdrucks

Definition

Wir ordnen jedem regulärer Ausdruck r seine *Sprache* $L(r)$ zu:

1. $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ und $L(a) = \{a\}$ für $a \in \Sigma$.

Die Sprache eines regulären Ausdrucks

Definition

Wir ordnen jedem regulärer Ausdruck r seine *Sprache* $L(r)$ zu:

1. $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ und $L(a) = \{a\}$ für $a \in \Sigma$.
2. $L(rs) = L(r)L(s)$
3. $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$
4. $L(r^*) = L(r)^*$

Reguläre Ausdrücke

Aufgabe

1. *Welche Sprache beschreibt* $(ab\emptyset)^*$*?*

Reguläre Ausdrücke

Aufgabe

1. *Welche Sprache beschreibt* $(ab\emptyset)^*$*?*
2. *Regulärer Ausdruck für*

$$\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \textit{ beginnt mit } a \textit{ und endet nicht mit } bc\}$$

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)

Definition

Ein NFA ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q Menge der *Zustände*
- Σ *Eingabealphabet*
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to 2^Q$ *Übergangsfunktion*
- $q_0 \in Q$ *Startzustand*
- $F \subseteq Q$ *Endzustände*

Der Potenzautomat

Definition

Sei M ein NFA, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Der zugehörige *Potenzautomat* M' ist so aufgebaut:

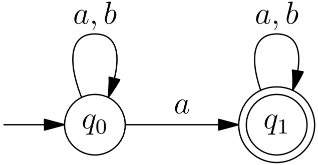
- $M' = (2^Q, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ mit
- $\delta' : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q, (S, a) \mapsto \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$
- $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$

Der Potenzautomat ist ein DFA!

Der Potenzautomat

Aufgabe

Bestimme den Potenzautomaten von



Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Satz

Die regulären Sprachen sind genau die, die von endlichen Automaten erkannt werden.

Die Myhill–Nerode-Relation $\equiv_L$

Definition

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$.

Definiere $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ vermöge

$$u \equiv_L v \iff uw \in L \Leftrightarrow vw \in L \text{ für alle } w \in \Sigma^*.$$

Der *Index* einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Die Myhill–Nerode-Relation $\equiv_L$

Definition

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$.

Definiere $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ vermöge

$$u \equiv_L v \iff uw \in L \Leftrightarrow vw \in L \text{ für alle } w \in \Sigma^*.$$

Der *Index* einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Satz (Satz von Myhill–Nerode)

$L \subseteq \Sigma^*$ regulär $\iff$ $\equiv_L$ hat endlichen Index.

Minimierung von DFAs

Definition

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
$q_1, q_2 \in Q$ sind *unterscheidbar*, falls

1. $q_1 \in F$, $q_2 \notin F$ oder
2. $q_1 \notin F$, $q_2 \in F$ oder
3. $\delta(q_1, a)$ und $\delta(q_2, a)$ sind unterscheidbar für ein $a \in \Sigma$.

Ein DFA heißt minimal, wenn seine Zustände paarweise unterscheidbar sind.

Minimierung von DFAs

Definition

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
$q_1, q_2 \in Q$ sind *unterscheidbar*, falls

1. $q_1 \in F$, $q_2 \notin F$ oder
2. $q_1 \notin F$, $q_2 \in F$ oder
3. $\delta(q_1, a)$ und $\delta(q_2, a)$ sind unterscheidbar für ein $a \in \Sigma$.

Ein DFA heißt minimal, wenn seine Zustände paarweise unterscheidbar sind.

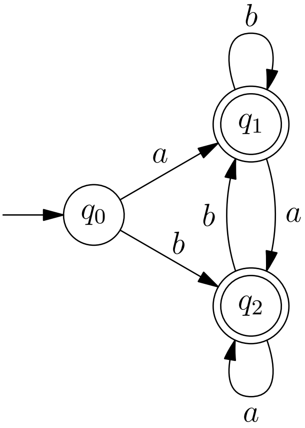
Satz

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ regulär, so gibt es einen minimalen DFA, der L erkennt.
Er hat genau $index(\equiv_L)$ viele Zustände.

Minimierung von DFAs

Aufgabe

Minimiere den folgenden DFA



Pumping Lemma

Satz (Pumping–Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbf{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung in Wörter $w = xyz$ existiert mit

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| > 0$
3. $xy^iz \in L$ *für alle* $i \geq 0$

Pumping Lemma

Satz (Pumping–Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es **ein** $n \in \mathbf{N}$*, sodass für* **jedes** *Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$* **eine** *Zerlegung in Wörter $w = xyz$ existiert mit*

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| > 0$
3. $xy^iz \in L$ *für alle $i \geq 0$*

Kontextfreie Grammatiken

Definition

Eine *kontextfreie Grammatik* ist ein 4-Tupel (N, T, P, S)

- N ein Alphabet der *Nonterminalsymbole*
- T ein Alphabet der *Terminalsymbole*
- P eine Menge von *Produktionen* der Form $A \to \alpha$ mit $A \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$
- $S \in N$ das Startsmbol

Es muss $N \cap T = \emptyset$ gelten.

Kontextfreie Grammatiken

Aufgabe

Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$L = \{a^{n-1}b^{n+2}c^5 \mid n \geq 1\}$$

Ableitungsbäume

Aufgabe

Es sei eine CFG G mit folgenden Produktionen gegeben:

$$S \to ABC, \quad A \to ab \mid baA, \quad B \to bc \mid cbB, \quad C \to ca \mid acC$$

Geben Sie einen Ableitungsbaum für das wort $baabbcacca$ an.

Kontextfreie Grammatiken

Aufgabe

Gegeben seien zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.

a) *Kann man eine CFG G_3 für $L(G_1) \cup L(G_2)$ entwerfen?*
b) *Kann man eine CFG G_4 für $L(G_1) \cap L(G_2)$ entwerfen?*

pre^*

Definition

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $L \subseteq (N \cup T)^*$ eine beliebige Sprache.

$$\mathrm{pre}^*_G(L) = \{\alpha \in (N \cup T)^* \mid \alpha \Rightarrow^*_G \beta, \quad \beta \in L\}$$

pre*

Aufgabe

Gegeben sei die Grammatik G mit

$$S \to aA \mid Bb \mid \epsilon, \qquad A \to Sb, \qquad B \to aS$$

Konstruieren Sie je einen NFA für

a) *pre*$^*(\{ab\})$
b) *pre*$^*(\{abab\})$

pre^* wichtige Fakten

- $w \in L(G)$ gdw. $S \in \text{pre}^*_G(\{w\})$
- $L(G) = \emptyset$ gdw. $S \notin \text{pre}^*_G(T^*)$
- Die Menge der produktiven Symbole ist $N \cap \text{pre}^*_G(T^*)$
- Die Menge der nullierbaren Symbole ist $N \cap \text{pre}^*_G(\{\epsilon\})$
- A ist unerreichbar gdw. $S \notin \text{pre}^*_G\Big((N \cup T)^* A (N \cup T)^*\Big)$

Entscheidungsprobleme CFG

- "$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?" ist unentscheidbar!
- "$L(G) = T^*$?" ist unentscheidbar!
- "$L(G_1) = L(G_2)$?" ist unentscheidbar!
- "$L(G_1) \subseteq L(G_2)$?" ist unentscheidbar!

Entscheidungsprobleme CFG

Aufgabe

Welche der folgenden Entscheidungsprobleme lassen sich für CFGs berechnen?

a) $L(G) = \emptyset$?

b) $L(G_1) = L(G_2)$?

c) $L(G_1) = \overline{L(G_2)}$?

Entscheidungsprobleme CFG

- "$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?" ist unentscheidbar!
- "$L(G) = T^*$?" ist unentscheidbar!
- "$L(G_1) = L(G_2)$?" ist unentscheidbar!
- "$L(G_1) \subseteq L(G_2)$?" ist unentscheidbar!

Pumpinglemma CFL

Definition

Für jede CFL L gibt es eine Zahl n für die gilt: Jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ hat eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| > 0$
3. $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$

Pumpinglemma CFL

Definition

Für jede CFL L gibt es eine Zahl n für die gilt: Jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ hat eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| > 0$
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei, welche nicht? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

1. $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i + j = k \}$
2. $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid ij = k \}$
3. $L_3 = \{ pp \mid p \in \{a, b\}^* \}$
4. $L_4 = \{ pqp^R \mid |p| = |q|, p, q \in \{a, b\}^* \}$

CFG

Aufgabe

Konstruieren Sie eine Grammatik die Bildschlagzeilen erzeugt.