RWTH Aachen **WS 2008/09**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 10
Kneis—Langer—Richter—Rossmanith 08.01.2009

♡ Übung zur Vorlesung Parametrisierte Algorithmen ♡

Tutoraufgabe T28

Das Problem Set Cover ist folgendermaßen definiert:

Input:	Ein Universum $\mathcal{U} = \{1, \ldots, n\}$, eine Familie $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_t\}$ von Teilmengen $S_i \subseteq \mathcal{U}$, eine Zahl k
Parameter:	k
Question:	Gibt es k Teilmengen, die zusammen $\mathcal{U}$ ergeben, also $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit $\|\mathcal{S}'\| \leq k$, so daß $\mathcal{U} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S$?

Reduzieren Sie parametrisiert Dominating Set auf Set Cover.

Tutoraufgabe T29

Reduzieren Sie parametrisiert Set Cover auf Dominating Set.

Tutoraufgabe T30

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Ein *irredundant set* ist eine Menge $I \subseteq V$ von Knoten, bei denen jedes $u \in I$ wenigstens einen sogenannten *privaten Nachbarn* $pn(u)$ hat: Ein privater Nachbar eines Knotens u ist ein Knoten $v \in pn(u)$, für den $N[v] \cap I = \{u\}$ gilt. Hierbei ist $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ die *geschlossene Nachbarschaft* von v. Das Problem Irredundant Set ist folgendermaßen definiert:

Input:	Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Zahl k
Parameter:	k
Question:	Gibt es in G ein *irredundant set* der Größe k?

Zeigen Sie, daß Irredundant Set in $W[1]$ enthalten ist.

Lösungsvorschlag

Wir konstruieren einen Schaltkreis mit *weft* 2.

Für alle $u \in V$ und alle $v \in N(u)$ gibt es eine Variable x_{uv}. Eine Belegung mit 1 dieser Variablen soll bedeuten, daß $u \in I$ und v der geforderte private Nachbar von u ist.

Folgende Klauseln der Größe zwei (also Gatter mit *fan-in* 2) werden nun mit einem großen, unbeschränkten $\bigwedge$ verknüpft: Für jedes $u \in V$ und jedes $v \in N(u)$ eine Klausel:

$$(x_{uv} \to \neg x_{uv'}) \qquad \forall v' \in N(u) \setminus \{v\} \tag{1}$$
$$(x_{uv} \to \neg x_{u'v}) \qquad \forall u' \in N(v) \setminus \{u\} \tag{2}$$
$$(x_{uv} \to \neg x_{vu'}) \qquad \forall u' \in N(v) \tag{3}$$
$$(x_{uv} \to \neg x_{u'v'}) \qquad \forall u' \in N(v) \setminus \{u\}, v' \in N(u') \tag{4}$$

Dabei steht die Teilformeln vom Typ:

(1) für: “Es gibt pro Knoten u höchstens einen ausgezeichneten privaten Nachbarn v.”

(2) für: “Jedes v ist nur privater Nachbar für höchstens ein u.”

(3) für: “Ein ausgezeichneter privater Nachbar ist selbst nicht in I.”

(4) für: “Wenn v ein ausgezeichneter privater Nachbar von u ist, dann ist kein anderer Nachbar von v in I.”

Man sieht leicht, daß Formeln des Typs (2) auch in (4) enthalten sind, allerdings haben wir diese hier zur Verdeutlichung mit aufgeführt.

Wenn es nun ein *irredundant set* der Größe k gibt, dann erfüllt eine Belegung der Größe k aller Variablen x_{uv} mit $u \in I$ und $v \in pn(u)$ die obige Formel (gibt es mehrere private Nachbarn, wähle einen beliebigen aus).

Die andere Richtung ist etwas komplizierter zu zeigen, jedoch für den ambitionierten Informatiker eine leichte Fingerübung. Joachim zwingt mich, diese trotzdem aufzuschreiben:

Sei eine erfüllende Belegung der Variablen x_{uv} gegeben, so daß genau k Variablen $x_{u_1v_1}, \dots, x_{u_kv_k}$ auf 1 gesetzt sind. Aus den Formeln (1) folgt, daß jeweils $u_i \neq u_j$ ist für alle $i \neq j$, es gibt also schon einmal k unterschiedliche Knoten u, die wir in das Set I wählen. Wir müssen nun nur noch zeigen, daß I tatsächlich ein *irredundant set* ist. Da sich die entsprechend ausgewählten privaten Nachbarn v_j für jedes u_j unmittelbar ergeben, reicht es aus, nur noch zu zeigen, daß für alle diese v_j auch tatsächlich $N[v_j] \cap I = \{u_j\}$ gilt. Wegen (1) ist $u_j \in N(v_j)$ und natürlich $u_j \in I$, also $\{u_j\} \subseteq N[v_j] \cap I$. Wegen (3) ist jedes solche v_j selbst nicht in I.

Angenommen, es gibt noch einen weiteren Knoten $u' \in N[v_j] \cap I$, dann ist wegen der Definition von I eine Variable der Form $x_{u'v'}$ für irgendein v' auf 1 gesetzt. Dieses verletzt aber die Klausel vom Typ (4) $x_{uv} \to \neg x_{u'v'}$, da sowohl x_{uv} als auch $x_{u'v'}$ auf 1 gesetzt wären, und ist somit ein Widerspruch, da die Belegung nicht mehr erfüllend sein kann.

Hausaufgabe H19

Reduzieren Sie Dominating Set auf Connected Dominating Set.

Bei Connected Dominating Set besteht die zusätzliche Anforderung an das *dominating set* D, daß der durch D induzierte Untergraph $G[D]$ zusammenhängend ist.

Lösungsvorschlag

Graph kopieren, jeden Knoten in der Kopie noch mit seinem Original sowie den Originalen seiner Nachbarschaft verbinden; Apex-Vertex an die Kopie, fertig.