RWTH Aachen
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Kneis—Langer—Richter—Rossmanith

WS 2008/09
Übungsblatt 5
20.11.2008

♡ Übung zur Vorlesung Parametrisierte Algorithmen ♡

Tutoraufgabe T14

Seien Π_1 und Π_2 durch endliche Ausschlussmengen charakterisierbare Grapheigenschaften. Sind die folgenden Klassen auch derartige Grapheigenschaften?

- $\Pi_1 \cap \Pi_2$
- $\Pi_1 \setminus \Pi_2$
- $\Pi_1 \cup \Pi_2$

Lösungsvorschlag

Seien X_1, X_2 die endlichen Ausschlußmengen für Π_1, Π_2.

- $\Pi_1 \cap \Pi_2$: Diese Grapheigenschaft hat die endliche Ausschlußmenge $X_1 \cup X_2$.
- $\Pi_1 \setminus \Pi_2$ ist im Allgemeinen keine vererbbare Grapheigenschaft, z.B. wenn Π_2 nur den leeren Graphen enthält und Π_1 eine echte Oberklasse von Π_2 ist.
- $\Pi_1 \cup \Pi_2$: Die endliche Ausschlußmenge ist hier:

  $$\bigcup_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \left\{ y \in \mathbb{G}_{|V(x_1)|+|V(x_2)|} \mid x_1 \trianglelefteq y \wedge x_2 \trianglelefteq y \right\}$$

  mit $\mathbb{G}_n$ der Menge aller Graphen mit höchstens n Knoten, und $x \trianglelefteq y$ gdw. x als induzierter Untergraph in y vorkommt.

Man kann leicht durch Fallunterscheidung nach Zugehörigkeit zu Π_1, Π_2 zeigen, daß die jeweiligen Ausschlußmengen tatsächlich das Gewünschte leisten.

Tutoraufgabe T15

Wir betrachten die Menge der Graphen, die ein Vertex Cover mit höchstens k Knoten besitzen. Gibt es eine endliche Charakterisierung durch Ausschlussmengen?

Lösungsvorschlag

Sie G ein Graph, dessen kleinstes Vertex Cover $t > k$ Knoten enthält. Dann enthält G einen induzierten Untergraphen G', dessen kleinstes Vertex Cover genau $k+1$ Knoten enthält: Wir können so einen Graphen konstruieren, in dem wir einfach Knoten aus dem minimalen VC entfernen. Würde es dabei in irgendeinem Schritt plötzlich ein billigeres VC geben, so wäre das originale VC nicht minimal gewesen.

Es reicht also aus, in der Ausschlussmenge Graphen mit einem minimalen Vertex Cover der Größe $k+1$ zu berücksichtigen. Wir konstruieren diese Menge wie folgt: Zur Ausschlussmenge gehören alle Graphen mit höchstens $3(k+1)(k+2)$ Knoten, deren minimales Vertex Cover die Größe $k+1$ hat.

Wir zeigen nun, daß diese Auschlussmenge ausreicht. Sie $G = (V, E)$ ein Graph, dessen minimales Vertex Cover C die Größe $k+1$ hat und dessen induzierte Untergraphen alle ein Vertex Cover der Größe höchstens k besitzten. Alle Graphen, die kein Vertex Cover der Größe höchstens k haben, besitzen einen solchen Graphen als induzierten Untergraph.

Wir zerlegen $C = C_1 \cup C_2$ mit $C_1 = \{v \in V \mid \deg(v) \leq k+1\}$ und $C_2 = C \setminus C_1$.

Offensichtlich ist $V = N[C]$, andernfalls gäbe es einen induzierten Untergraphen von G, dessen minimales Vertex Cover ebenfalls $k+1$ Knoten umfasst. Außerdem gilt nach Konstruktion $|N[C_1]| \leq (k+1)(k+2)$.

Nehmen wir an, daß $|N[C_2]| > (k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$ gilt. Dann gibt es einen Knoten $u \in N[C_2]$, der nicht Teil von $N[C_1]$ ist, sodaß der Grad aller Knoten aus C_2 in $G \setminus \{u\}$ immer noch größer als $k+1$ ist.

Dann ist das kleinste Vertex Cover von $G \setminus \{u\}$ allerdings immer noch $k+1$, da weiterhin jeder Knoten aus C_2 zum Vertex Cover gehören muss und $N[C_1]$ (mit kleinstem Cover C_1) nicht verändert wurde.

Somit hat G höchstens $(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$ Knoten und ist damit Teil unserer Ausschlussmenge.

Tutoraufgabe T16

Nun betrachten wir das folgende Problem: Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k. Lässt sich G durch das Hinzufügen von höchstens k Kanten so verändern, dass G chordal wird?

Gibt es eine endliche Charakterisierung durch Ausschlussmengen?

Lösungsvorschlag

Wie in der Vorlesung vorgerechnet, gibt es für chordale Graphen keine endliche Ausschlussmenge, da man Kreise beliebiger Länge ausschliessen muss. Jeder Kreis fester Länge enthält aber keinen Kreis kleinerer Länge als induzierten Untergraph.

Tutoraufgabe T17

Entwerfen Sie einen FPT-Algorithmus für das obige Problem.

Lösungsvorschlag

Zunächst ist festzustellen, daß ein Kreis der Länge größer als $3k$, der keine einzige Sehne enthält, nicht mit nur k Kanten vollständig trianguliert werden kann.

Ein Algorithmus geht nun ähnlich vor wie der Algorithmus aus Hausaufgabe H6, nur verwendet er anstatt des $\binom{V}{3}$-Ansatzes eine Tiefensuche von jedem Knoten aus, um zu testen, ob er dieser Knoten auf einem nicht ausreichend trianguliertem Kreis liegt: Für jedes v starte man eine Tiefensuche auf G von v aus. Jedesmal, wenn man Rückkanten nach v (und damit einen Kreis) im Graphen entdeckt, teste man, ob der so entdeckte Kreis trianguliert ist. Wenn nein, der Kreis aber mehr als $3k$ Knoten enthält, antworte direkt „Nein“.

Gibt es einen nicht triangulierten Kreis $x_1x_2\dots x_t$ mit $t \leq 3k$, reicht es aus, alle höchstens $\binom{3k}{2}$ Möglichkeiten rekursiv durchzutesten, Sehnen hinzuzufügen.

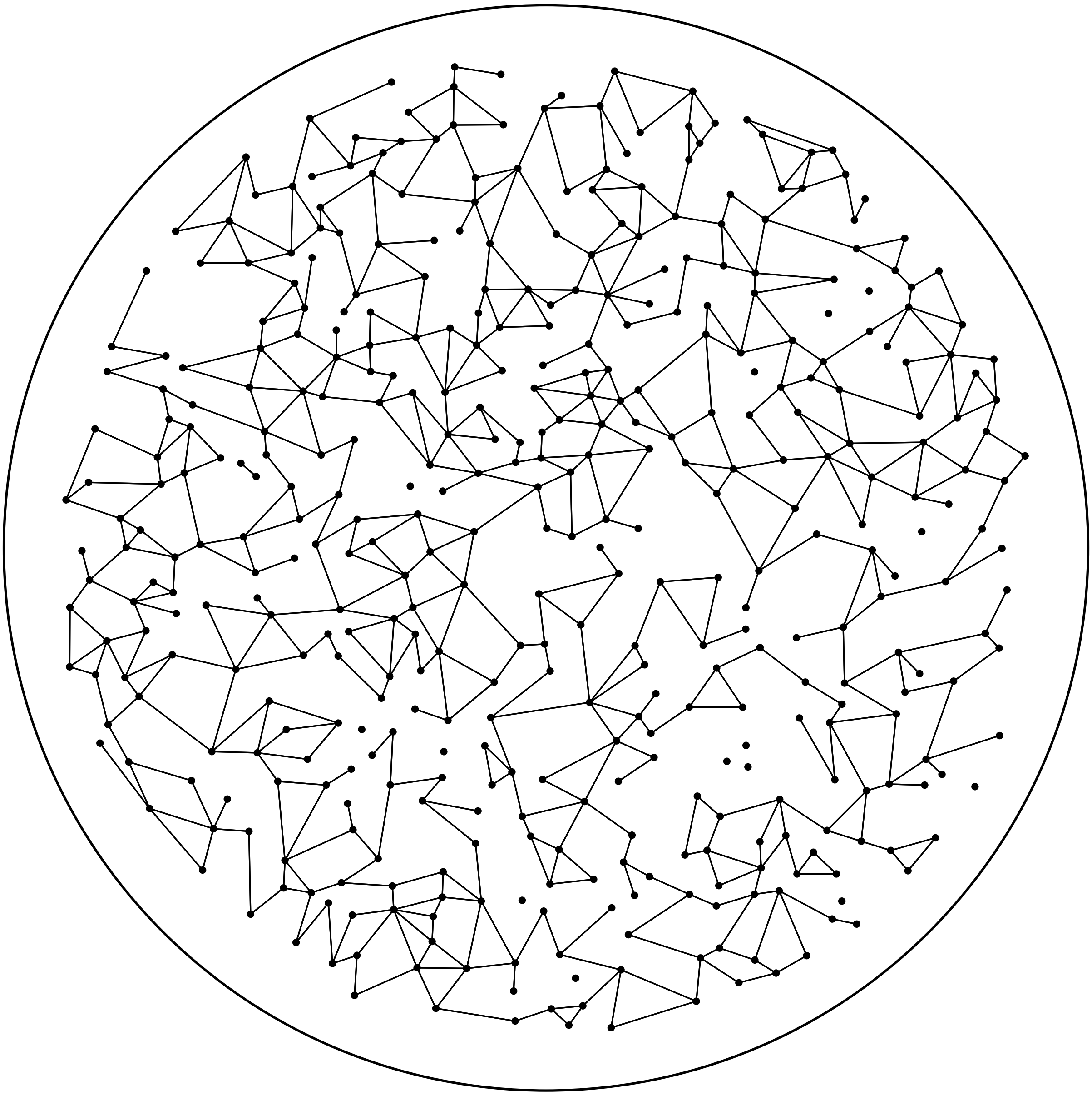
Insgesamt erhalten wir einen fürchterlich großen Suchbaum, dessen Größe aber wieder durch eine Funktion in k beschränkt werden kann: Die Höhe ist immer noch k, und jeder Knoten hat höchstens $\binom{3k}{2}$ Kinder.

Der Aufwand pro Suchbaumknoten ist auch wieder polynomiell: Jede der n Tiefensuchen benötigt Zeit $O(n + m)$. Pro Tiefensuche kann man höchstens m mal Rückkanten entdecke, und jede anschließende Überprüfung pro Rückkante ist auch in polynomieller Zeit möglich.

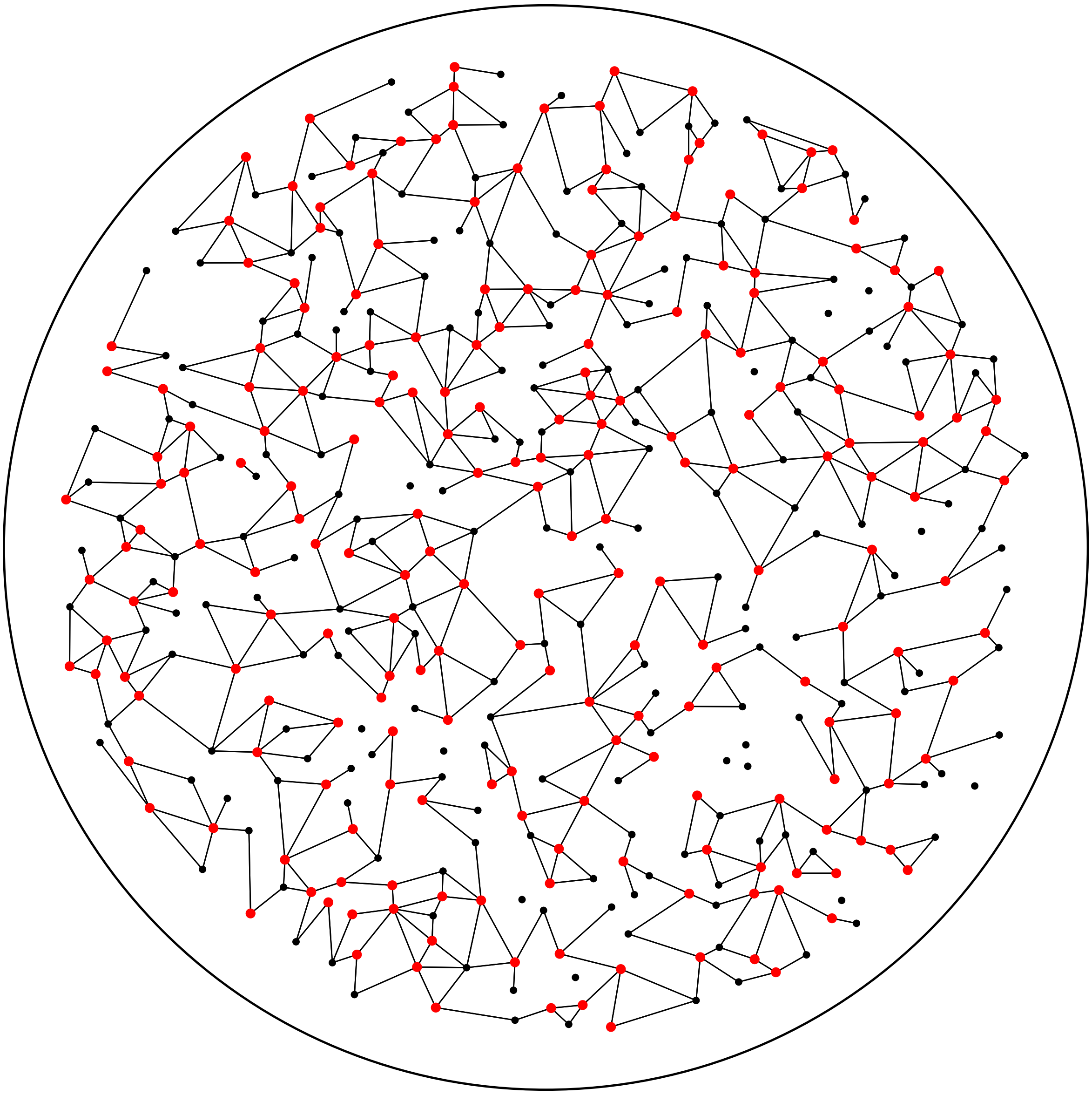
Die Hausaufgabe ist auf der Rückseite.

Hausaufgabe H9

Finden Sie ein optimales Vertex Cover für den folgenden Graphen, und markieren Sie die gewählten Knoten. Wie groß ist das Cover?



Lösungsvorschlag



Ein minimales VC enthält genau 217 Knoten (in obiger Grafik farbig markiert).