Sunflowers

Daniel Brammertz

Lehr- und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen

Seminar Extremal Combinatorics 2004

Übersicht

Kapitelübersicht

Weak Δ-System

Definition

Sei $\mathcal{F}$=$\{S_1$,...,$S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt *weak Δ-System* $\iff \exists\lambda\ \forall i \neq j\ \ |S_i \cap S_j| = \lambda$

Beispiel

$\mathcal{F}$ =$\{$

- $\{$a,b,c$\}$
- $\{$a,d,e$\}$
- $\{$b,d,f$\}$

$\}$

Weak Δ-System

Definition

Sei $\mathcal{F}$={S_1,...,S_m} eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt *weak Δ-System* $\iff \exists\lambda\ \forall i \neq j\ \ |S_i \cap S_j| = \lambda$

Beispiel

$\mathcal{F}$ ={

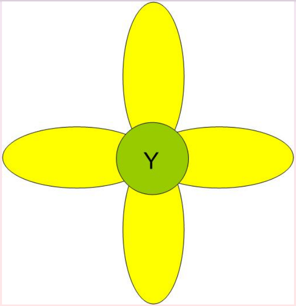
- {a,b,c}
- {a,d,e}
- {b,d,f}

}

Sunflowers

Definition

Sei $\mathcal{F}=\{S_1,\ldots,S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt Δ-System (oder Sunflower) mit k Blättern und Kern Y
$\iff \forall i \neq j \;\; S_i \cap S_j = Y \;\; \wedge \;\; \forall k \;\; S_k - Y \neq \emptyset$



Sunflowers

Definition

Sei $\mathcal{F}=\{S_1,\ldots,S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt Δ-System (oder Sunflower) mit k Blättern und Kern Y
$\iff \forall i \neq j \;\; S_i \cap S_j = Y \;\; \wedge \;\; \forall k \;\; S_k - Y \neq \emptyset$

Beispiel 1

$\mathcal{F} =\{$

- {a,b}
- {a,c,d}
- {a,e,f,g}

$\}$ ist eine Sunflower mit $Y = \{a\}$

Sunflowers

Definition

Sei $\mathcal{F}$=$\{S_1,\ldots,S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt Δ-System (oder Sunflower) mit k Blättern und Kern Y
$\iff \forall i \neq j \;\; S_i \cap S_j = Y \;\; \wedge \; \forall k \;\; S_k - Y \neq \emptyset$

Beispiel 2

$\mathcal{F}$ =$\{$

- {a,b,c}
- {a,d,e}
- {b,d,f}

$\}$ ist keine Sunflower, da $\{a,b,c\} \cap \{a,d,e\} \neq \{a,b,c\} \cap \{b,d,f\}$

Sunflowers

Definition

Sei $\mathcal{F}$=$\{S_1,\ldots,S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt Δ-System (oder Sunflower) mit k Blättern und Kern Y
$\Longleftrightarrow \forall i \neq j \;\; S_i \cap S_j = Y \;\; \wedge \; \forall k \;\; S_k - Y \neq \emptyset$

Beispiel 3

$\mathcal{F}$ =$\{$

- {a}
- {a,b}
- {a,c,d}

$\}$ ist keine Sunflower, da $\{a\} - Y = \emptyset$

Sunflowers

Definition

Sei $\mathcal{F}=\{S_1,\ldots,S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt Δ-System (oder Sunflower) mit k Blättern und Kern Y
$\iff \forall i \neq j \;\; S_i \cap S_j = Y \;\; \wedge \;\forall k \;\; S_k - Y \neq \emptyset$

Eigenschaften von Sunflowers

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ eine Sunflower mit Kern Y, dann gilt

- $\forall i \;\; S_i \supset Y$
- $\forall i \neq j \;\; S_i - Y \cap S_j - Y = \emptyset$
- $\nexists i \;\; S_i = Y$

Flowers

Definition

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.
Eine Menge B heißt *Blocking-Set* von $\mathcal{F} \iff \forall i \quad S_i \cap B \neq \emptyset$

Definition

Die *blocking number* $\tau(\mathcal{F})$ ist die Kardinalität einer kleinsten Menge, die ein *Blocking-Set* von $\mathcal{F}$ ist. Falls $\emptyset \in \mathcal{F}$ ist $\tau(\mathcal{F}) = 0$

Definition

Die *Restriction* $\mathcal{F}_B$ einer Familie $\mathcal{F}$ auf eine Menge B ist:
$\mathcal{F}_B = \{S - B \;:\; S \in \mathcal{F}, S \supseteq B\}$

Flowers

Definition

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.
Eine Menge B heißt *Blocking-Set* von $\mathcal{F} \iff \forall i \quad S_i \cap B \neq \emptyset$

Definition

Die *blocking number* $\tau(\mathcal{F})$ ist die Kardinalität einer kleinsten Menge, die ein *Blocking-Set* von $\mathcal{F}$ ist. Falls $\emptyset \in \mathcal{F}$ ist $\tau(\mathcal{F}) = 0$

Definition

Die *Restriction* $\mathcal{F}_B$ einer Familie $\mathcal{F}$ auf eine Menge B ist:
$\mathcal{F}_B = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \supseteq B\}$

Flowers

Definition

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.
Eine Menge B heißt *Blocking-Set* von $\mathcal{F} \iff \forall i \quad S_i \cap B \neq \emptyset$

Definition

Die *blocking number* $\tau(\mathcal{F})$ ist die Kardinalität einer kleinsten Menge, die ein *Blocking-Set* von $\mathcal{F}$ ist. Falls $\emptyset \in \mathcal{F}$ ist $\tau(\mathcal{F}) = 0$

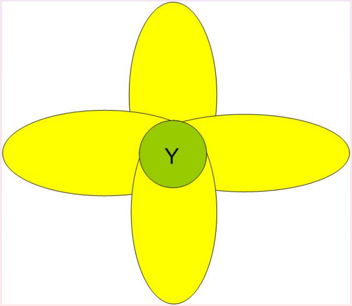
Definition

Die *Restriction* $\mathcal{F}_B$ einer Familie $\mathcal{F}$ auf eine Menge B ist:
$\mathcal{F}_B = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \supseteq B\}$

Flowers

Definition

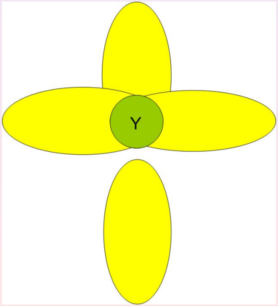
Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt *Flower* mit k Blättern und Kern $Y \iff \tau(\mathcal{F}_Y) \geq k$



Flowers

Definition

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt *Flower* mit k Blättern und Kern $Y \iff \tau(\mathcal{F}_Y) \geq k$



Flowers

Definition

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen.
$\mathcal{F}$ heißt *Flower* mit k Blättern und Kern $Y \iff \tau(\mathcal{F}_Y) \geq k$

Eigenschaften

- $\mathcal{F}$ kann eine *Flower* sein, obwohl die $S_1 - Y, ..., S_m - Y$ nicht disjunkt sind
- $\mathcal{F}$ kann eine *Flower* sein, obwohl ein $S_i \not\supset Y$
- $\nexists i \;\; S_i = Y$
- $\mathcal{F}$ ist eine Sunflower mit Kern Y und k Blättern $\Longrightarrow \mathcal{F}$ ist eine Flower mit k Blättern und Kern Y

Kapitelübersicht

Das Sunflower-Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \; |S_i| \; = s$
$|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s \implies \mathcal{F}$ *enthält* eine *Sunflower* mit k Blättern

Beweis - Induktionsanfang

- Beweis durch Induktion über s
- Für $s = 1$ ist $|\mathcal{F}| \geq k$. Beliebige k Elemente aus $\mathcal{F}$ bilden eine *Sunflower* mit $Y = \emptyset$ $\quad \surd$

Beweis - Induktionsschritt

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, ...A_t\}$ eine maximale paarweise disjunkte Familie aus $\mathcal{F}$
- Fallunterscheidung: Falls $t \geq k$ $\quad \square$

Das Sunflower-Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \, |S_i| \; = s$
$|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s \implies \mathcal{F}$ *enthält* eine *Sunflower* mit k Blättern

Beweis - Induktionsanfang

- Beweis durch Induktion über s
- Für $s = 1$ ist $|\mathcal{F}| \geq k$. Beliebige k Elemente aus $\mathcal{F}$ bilden eine *Sunflower* mit $Y = \emptyset$ $\quad\surd$

Beweis - Induktionsschritt

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, ...A_t\}$ eine maximale paarweise disjunkte Familie aus $\mathcal{F}$
- Fallunterscheidung: Falls $t \geq k$ $\quad\square$

Das Sunflower-Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \, |S_i| = s$
$|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s \implies \mathcal{F}$ *enthält* eine *Sunflower* mit k Blättern

Beweis - Induktionsanfang

- Beweis durch Induktion über s
- Für $s = 1$ ist $|\mathcal{F}| \geq k$. Beliebige k Elemente aus $\mathcal{F}$ bilden eine *Sunflower* mit $Y = \emptyset$ $\surd$

Beweis - Induktionsschritt

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, ...A_t\}$ eine maximale paarweise disjunkte Familie aus $\mathcal{F}$
- Fallunterscheidung: Falls $t \geq k$ $\square$

Sunflowers

Beweis - Induktionschritt - 2. Fall: $t \leq (k-1)$

- Sei $B = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq t} A_i$; Es gilt: $|B| \leq s(k-1)$
- B schneidet jede Menge aus $\mathcal{F}$, da $\mathcal{A}$ maximal disjunkt ist
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{(s-1)}$ Mengen aus $\mathcal{F}$ vorkommt
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine Sunflower mit k Blättern.
- Fügt man x wieder allen Mengen aus $\mathcal{F}_x$ hinzu erhält man eine Sunflower in $\mathcal{F}$. $\square$

Sunflowers

Beweis - Induktionschritt - 2. Fall: $t \leq (k-1)$

- Sei $B = \bigcup_{1 \leq i \leq t} A_i$; Es gilt: $|B| \leq s(k-1)$
- B schneidet jede Menge aus $\mathcal{F}$, da $\mathcal{A}$ maximal disjunkt ist
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{(s-1)}$ Mengen aus $\mathcal{F}$ vorkommt
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine Sunflower mit k Blättern.
- Fügt man x wieder allen Mengen aus $\mathcal{F}_x$ hinzu erhält man eine Sunflower in $\mathcal{F}$ $\square$

Sunflowers

Beweis - Induktionschritt - 2. Fall: $t \leq (k-1)$

- Sei $B = \bigcup_{1 \leq i \leq t} A_i$; Es gilt: $|B| \leq s(k-1)$
- B schneidet jede Menge aus $\mathcal{F}$, da $\mathcal{A}$ maximal disjunkt ist
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{(s-1)}$ Mengen aus $\mathcal{F}$ vorkommt
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine Sunflower mit k Blättern.
- Fügt man x wieder allen Mengen aus $\mathcal{F}_x$ hinzu erhält man eine Sunflower in $\mathcal{F}$ $\square$

Sunflowers

Beweis - Induktionschritt - 2. Fall: $t \leq (k-1)$

- Sei $B = \bigcup_{1 \leq i \leq t} A_i$; Es gilt: $|B| \leq s(k-1)$
- B schneidet jede Menge aus $\mathcal{F}$, da $\mathcal{A}$ maximal disjunkt ist
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{(s-1)}$ Mengen aus $\mathcal{F}$ vorkommt
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine Sunflower mit k Blättern.
- Fügt man x wieder allen Mengen aus $\mathcal{F}_x$ hinzu erhält man eine Sunflower in $\mathcal{F}$ $\square$

Sunflowers

Beweis - Induktionschritt - 2. Fall: $t \leq (k-1)$

- Sei $B = \bigcup_{1 \leq i \leq t} A_i$; Es gilt: $|B| \leq s(k-1)$
- B schneidet jede Menge aus $\mathcal{F}$, da $\mathcal{A}$ maximal disjunkt ist
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!(k-1)^s}{s(k-1)} = (s-1)!(k-1)^{(s-1)}$ Mengen aus $\mathcal{F}$ vorkommt
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine Sunflower mit k Blättern.
- Fügt man x wieder allen Mengen aus $\mathcal{F}_x$ hinzu erhält man eine Sunflower in $\mathcal{F}$ $\square$

Obere und untere Schranken

Es ist nicht bekannt, ob es eine niedrigere Schranke als die des Sunflower-Lemmas gibt.

Definition

Sei $f(s,k)$ die kleinste Größe für eine *s-uniforme* Mengenfamilie, ab der sie eine *Sunflower* mit k Blättern enthalten muss.

Satz

$(k-1)^s < f(s,k) \leq s!(k-1)^s + 1$

Obere und untere Schranken

Es ist nicht bekannt, ob es eine niedrigere Schranke als die des Sunflower-Lemmas gibt.

Definition

Sei $f(s,k)$ die kleinste Größe für eine *s-uniforme* Mengenfamilie, ab der sie eine *Sunflower* mit k Blättern enthalten muss.

Satz

$(k-1)^s < f(s,k) \leq s!(k-1)^s + 1$

Obere und untere Schranken

Es ist nicht bekannt, ob es eine niedrigere Schranke als die des Sunflower-Lemmas gibt.

Definition

Sei $f(s, k)$ die kleinste Größe für eine *s-uniforme* Mengenfamilie, ab der sie eine *Sunflower* mit k Blättern enthalten muss.

Satz

$(k-1)^s < f(s, k) \leq s!(k-1)^s + 1$

Kapitelübersicht

Das Flower-Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \, |S_i| = s$
$|\mathcal{F}| > (k-1)^s \implies \mathcal{F}$ *enthält* eine *Flower* mit k Blättern

Beweis - Induktionsanfang

- Beweis durch Induktion über s
- Für $s = 1$ ist $|\mathcal{F}| \geq k$. Beliebige k Elemente aus $\mathcal{F}$ bilden eine *Flower* mit $Y = \emptyset$ $\quad\surd$

Beweis - Induktionsschritt

- Fallunterscheidung: Falls $\tau(\mathcal{F}) \geq k$, dann ist $\mathcal{F}$ eine Flower mit mindestens k Blättern

Das Flower-Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \, |S_i| \; = s$
$|\mathcal{F}| > (k-1)^s \implies \mathcal{F}$ *enthält* eine *Flower* mit k Blättern

Beweis - Induktionsanfang

- Beweis durch Induktion über s
- Für $s = 1$ ist $|\mathcal{F}| \geq k$. Beliebige k Elemente aus $\mathcal{F}$ bilden eine *Flower* mit $Y = \emptyset \quad \surd$

Beweis - Induktionsschritt

- Fallunterscheidung: Falls $\tau(\mathcal{F}) \geq k$, dann ist $\mathcal{F}$ eine Flower mit mindestens k Blättern

Das Flower-Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \, |S_i| \; = s$
$|\mathcal{F}| > (k-1)^s \implies \mathcal{F}$ *enthält* eine *Flower* mit k Blättern

Beweis - Induktionsanfang

- Beweis durch Induktion über s
- Für $s = 1$ ist $|\mathcal{F}| \geq k$. Beliebige k Elemente aus $\mathcal{F}$ bilden eine *Flower* mit $Y = \emptyset \quad \surd$

Beweis - Induktionsschritt

- Fallunterscheidung: Falls $\tau(\mathcal{F}) \geq k$, dann ist $\mathcal{F}$ eine Flower mit mindestens k Blättern

Das Flower-Lemma

Beweis - Induktionsschritt - 2. Fall $\tau(\mathcal{F}) < k$

- Es gibt eine Menge B der Größe $k-1$ die alle Mengen aus $\mathcal{F}$ schneidet
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in mindestens $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{(k-1)^s}{k-1} = (k-1)^{(s-1)}$ Elementen aus $\mathcal{F}$ enthalten ist.
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine *Flower* mit k Blättern und einem Kern Y
- Durch hinzufügen dieses x zu allen Elementen der *Flower* erhält man eine *Flower* aus $\mathcal{F}$ mit Kern $Y \cup \{x\}$ $\square$

Das Flower-Lemma

Beweis - Induktionsschritt - 2. Fall $\tau(\mathcal{F}) < k$

- Es gibt eine Menge B der Größe $k-1$ die alle Mengen aus $\mathcal{F}$ schneidet
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in mindestens $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{(k-1)^s}{k-1} = (k-1)^{(s-1)}$ Elementen aus $\mathcal{F}$ enthalten ist.
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine *Flower* mit k Blättern und einem Kern Y
- Durch hinzufügen dieses x zu allen Elementen der *Flower* erhält man eine *Flower* aus $\mathcal{F}$ mit Kern $Y \cup \{x\}$ $\square$

Das Flower-Lemma

Beweis - Induktionsschritt - 2. Fall $\tau(\mathcal{F}) < k$

- Es gibt eine Menge B der Größe $k-1$ die alle Mengen aus $\mathcal{F}$ schneidet
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in mindestens $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{(k-1)^s}{k-1} = (k-1)^{(s-1)}$ Elementen aus $\mathcal{F}$ enthalten ist.
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine *Flower* mit k Blättern und einem Kern Y
- Durch hinzufügen dieses x zu allen Elementen der *Flower* erhält man eine *Flower* aus $\mathcal{F}$ mit Kern $Y \cup \{x\}$ $\square$

Das Flower-Lemma

Beweis - Induktionsschritt - 2. Fall $\tau(\mathcal{F}) < k$

- Es gibt eine Menge B der Größe $k-1$ die alle Mengen aus $\mathcal{F}$ schneidet
- Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein $x \in B$, daß in mindestens $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{(k-1)^s}{k-1} = (k-1)^{(s-1)}$ Elementen aus $\mathcal{F}$ enthalten ist.
- Auf Die Menge $\mathcal{F}_x = \{S - \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ kann die Induktionsvorraussetzung angewandt werden, d.h. $\mathcal{F}_x$ enthält eine *Flower* mit k Blättern und einem Kern Y
- Durch hinzufügen dieses x zu allen Elementen der *Flower* erhält man eine *Flower* aus $\mathcal{F}$ mit Kern $Y \cup \{x\}$ $\square$

Kapitelübersicht

Satz von Füredi

Definition

Der *common part* einer Familie $\mathcal{F} = \{S_1, ...S_k\}$ ist
$Y(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j)$

Satz von Füredi

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_k\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \quad |S_i| \leq s$
$|\mathcal{F}| > k^s \implies$ es gibt eine Teilmenge von $\mathcal{F}$ der Mächtigkeit $(k+1)$ mit einem *common part* der weniger als s Elemente hat.

Satz von Füredi

Definition

Der *common part* einer Familie $\mathcal{F} = \{S_1, ...S_k\}$ ist
$Y(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j)$

Satz von Füredi

Sei $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_k\}$ eine Familie von Mengen mit $\forall i \ \ |S_i| \leq s$
$|\mathcal{F}| > k^s \implies$ es gibt eine Teilmenge von $\mathcal{F}$ der Mächtigkeit $(k+1)$ mit einem *common part* der weniger als s Elemente hat.

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \Longrightarrow$ 2 Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \;:\; S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $A = \{S_{i_1} - E, \dots, S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(A)| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, \dots, S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(A)| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ □

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \Longrightarrow 2$ Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $A = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(A)| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(A)| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ $\square$

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \implies$ 2 Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $A = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(A)| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(A)| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ $\square$

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \implies 2$ Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $\mathcal{A} = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(\mathcal{A})| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(\mathcal{A})| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ $\square$

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \Longrightarrow$ 2 Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $\mathcal{A} = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(\mathcal{A})| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(\mathcal{A})| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ $\square$

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \Longrightarrow$ 2 Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$

Nebenrechnung - Beweis durch Widerspruch

$|\mathcal{F}| = \sum_{B \subseteq B_0} |\mathcal{F}(B)| = \sum_{i=0}^{s} \sum_{B \subseteq B_0 \wedge |B|=i} |\mathcal{F}(B)| \leq \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (k-1)^{s-i} =$ k^s Widerspruch!

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \implies 2$ Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \ : \ S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $\mathcal{A} = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(\mathcal{A})| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(\mathcal{A})| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ $\square$

Satz von Füredi

Beweis

- Beweis durch Induktion über k und s
- Ind.-Anfang: Für k=1 und s=1 gilt $|\mathcal{F}| > 1 \Longrightarrow 2$ Elemente aus $\mathcal{F}$ haben einen *Common Part* der kleiner als 1 ist.
- oBdA kann man annehmen, daß ein $B_0 \in \mathcal{F}$ mit $|B_0| = s$ ex.
- Definiere: $\mathcal{F}(B) = \{S - B \;\; : \;\; S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}$ für $B \subseteq B_0$
- $\exists E \subseteq B_0$ mit $|\mathcal{F}(E)| > (k-1)^{s-|E|}$
- Nach Induktionsvorraussetzung enthält $\mathcal{F}(E)$ eine Teilmenge $\mathcal{A} = \{S_{i_1} - E, ..., S_{i_k} - E\}$ mit $|Y(\mathcal{A})| < (s - |E|)$
- Die Menge $S_{i_1}, ..., S_{i_k}, B_0$ liegt in $\mathcal{F}$ und hat einen *common part* von höchstens $|Y(\mathcal{A})| + |E| > (s - |E|) + |E| = s$ $\square$

Kapitelübersicht

Beispiel zur Anwendung

Definitionen

- Ein *Literal* ist eine boolsche Variable x_i oder ihre Negation $\bar{x}_i$
- Ein *Monomial* ist eine UND-Verknüpfung von Literalen
- Eine *Clause* ist eine ODER-Verknüpfung von Literalen
- Ein *1-Term* einer boolschen Funktion f ist ein *Monomial* M mit der Eigenschaft $M(a) \leq f(a)$
- Ein *0-Term* einer boolschen Funktion f ist eine *Clause* C mit der Eigenschaft $C(a) \geq f(a)$
- Ein *Minterm* ist ein *1-Term* wobei das Entfernen eines Literals die *1-Term*-Eigenschaft verletzen würde.
- Eine boolsche Funktion ist *t-And-Or* wenn sie als beliebig große UND-Verknüpfung von *Clauses* der größe höchstens t geschrieben werden kann.

Minterm-Lemma

Lemma

Sei f eine t-And-Or Funktion über n Variablen.
Dann gilt für alle $s \in \{1, ..., n\}$: Die Funktion f hat höchstens t^s Minterme der Größe s

Beweis des Minterm-Lemmas

- Sei $f = C_1 \wedge ... \wedge C_m$, wobei jede *Clause* C_i höchstens die Größe s hat
- f kann als Familie von Mengen von Literalen betrachtet werden.
- Sei $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_m\}$ die zu f gehörige Familie
- Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller *Minterme*
- Es gilt:Jede Menge aus $\mathcal{F}$ schneidet jede Menge aus $\mathcal{C}$
- Annahme das Lemma gälte nicht, also $|\mathcal{F}| > t^s$
- Nach dem Flower Lemma hat $\mathcal{F}$ eine Flower mit $(t+1)$ Blättern und einem Kern Y

Beweis des Minterm-Lemmas

- d.h. keine Menge der Größe t kann jedes Element dieser Familie schneiden:
  $\mathcal{F}_Y = \{M - Y \ : \ M \in \mathcal{F}, M \supseteq Y\}$
- Y ist echte Teilmenge mindestens eines Minterms aus $\mathcal{F}$, d.h. Y kann nicht alle Mengen aus $\mathcal{C}$ schneiden
- Sei $C \in \mathcal{C}$ mit $C \cap Y = \emptyset$
- C muss alle Mengen aus $\mathcal{F}$ schneiden
- Da $C \cap Y = \emptyset$ gilt, muss C auch alle Mengen aus $\mathcal{F}_Y$ schneiden.
- Aber $|C| \leq t \implies$ Widerspruch zum Flower-Lemma $\square$

ENDE