Colorings

Gregor Hink

Seminar: Extremal Combinatorics

Sommersemester 2004

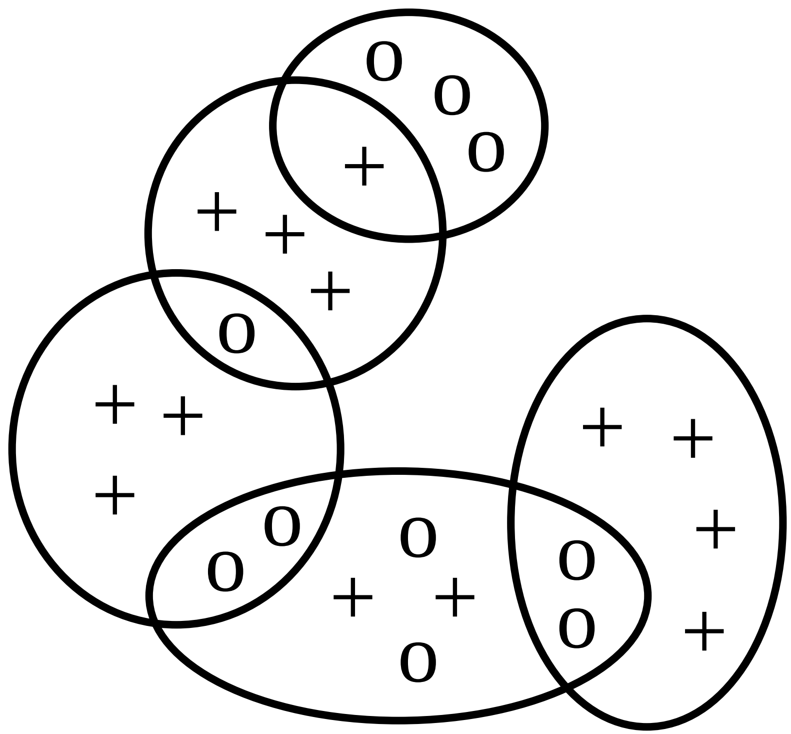
LuFG Theoretische Informatik, RWTH Aachen

Gliederung

- Grundlagen
- 2-Färbbarkeit (Eigenschaft B)
- Komplexität von Färbungsalgorithmen
- Zusammenfassung

Grundlagen

- Menge X von Punkten
- Menge F von Teilmengen von X
- Menge $\{1, \ldots, r\}$ von Farben mit $r \geq 2$
- r-Färbung von X ist eine Abbildung $c : X \to \{1, \ldots, r\}$

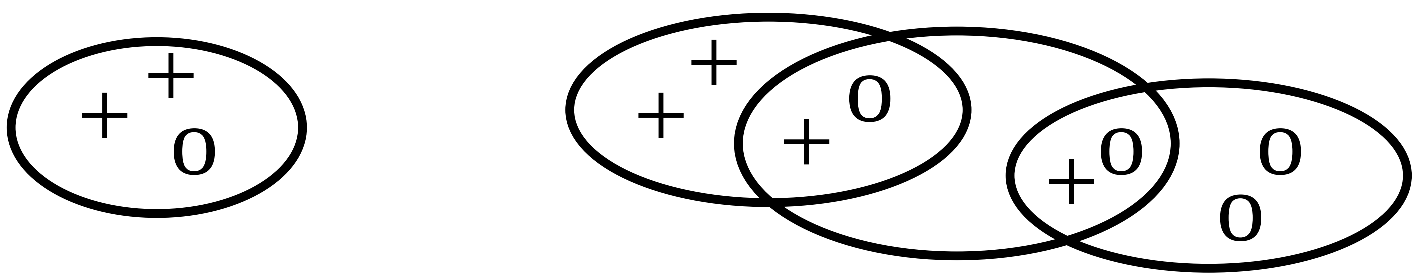


Grundlagen

- $A \in F$ ist monochromatisch
  $\Leftrightarrow c(a) = i \quad \forall a \in A$ mit einem festen $i \in \{1, \ldots, r\}$
- Färbung von F ist gültig
  $\Leftrightarrow$ kein Element von F ist monochromatisch
- chromatische Zahl $\chi(F) =$ kleinste Zahl von Farben, für die eine gültige Färbung für F existiert
- F ist 2-färbbar $\leftrightarrow F$ hat Eigenschaft B
  - zu Ehren von Felix Bernstein
  - deutscher Mathematiker (1878 – 1956)

2-Färbbarkeit (Eigenschaft B)

- **Satz 1:**
  Wenn $|A \cap B| \neq 1$ für jeweils zwei Mengen $A \neq B \in F$ ist, dann ist F 2-färbbar.



Beweis von Satz 1:

- Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, färbe x_1 beliebig
- Annahme: $x_1, \ldots, x_i$ sind bereits gefärbt
- x_{i+1} kann nicht mit Farbe 0 gefärbt werden
- $\Rightarrow \exists A \in F$ mit $x_{i+1} \in A$ und alle Punkte in $A \backslash \{x_{i+1}\}$ sind mit Farbe 0 gefärbt
- x_{i+1} kann nicht mit Farbe 1 gefärbt werden
- $\Rightarrow \exists B \in F$ mit $x_{i+1} \in B$ und alle Punkte in $B \backslash \{x_{i+1}\}$ sind mit Farbe 1 gefärbt
- $\Rightarrow A \cap B = \{x_{i+1}\} \Rightarrow$ Widerspruch
- $\Rightarrow x_{i+1}$ kann gefärbt werden

2-Färbbarkeit (Eigenschaft B)

- **Satz 2:**
  Sei F eine Menge von Teilmengen, die jeweils mindestens die Mächtigkeit k haben. Wenn $|F| < 2^{k-1}$ ist, dann ist F 2-färbbar.

Beweis von Satz 2

- seien $|X| = n$ und $A \in F$
- sei $C(A)$ die Anzahl der Färbungen, bei denen A vollständig mit einer Farbe gefärbt ist
- $\Rightarrow C(A) = 2 \cdot 2^{n-|A|} \leq 2 \cdot 2^{n-k} = 2^{n-k+1}$
- Anzahl der ungültigen Färbungen für F:

$$\leq \sum_{A \in F} C(A) \leq \sum_{A \in F} 2^{n-k+1} = |F| \cdot 2^{n-k+1}$$

- Anzahl aller Färbungen für F: 2^n
- $|F| \cdot 2^{n-k+1} < 2^{k-1} \cdot 2^{n-k+1} = 2^n$
- $\Rightarrow$ es existiert mindestens eine gültige Färbung

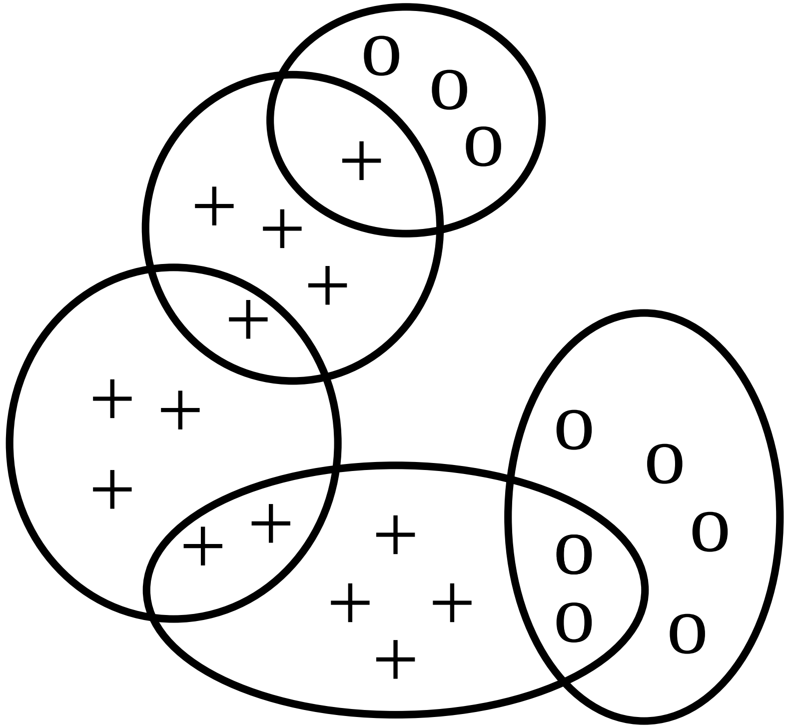
2-Färbbarkeit (Eigenschaft B)

- **Def:** Eine Menge F von Teilmengen ist genau dann k-einheitlich, wenn jedes Element von F die Mächtigkeit k hat.
- **Satz 3:**
  Für jede k-einheitliche Menge F von Teilmengen existiert eine 2-Färbung, bei der höchstens $|F| \cdot 2^{1-k}$ Elemente von F monochromatisch sind.

Beweis von Satz 3

- Sei $|X| = n$ und $S \subseteq X$
- $M(S)$ = Anzahl der monochromatischen Elemente von F bei der Färbung, die alle Punkte von S mit der einen Farbe und alle anderen Punkte mit der anderen Farbe färbt
- **Idee:**
  Berechnung der durchschnittlichen Größe von $M(S)$

Beweis von Satz 3



- Summierung über alle möglichen Teilmengen von X:

$$\sum_{S \subseteq X} M(S) = \sum_{A \in F} 2 \cdot |\{S : A \subseteq S\}| = |F| \cdot 2 \cdot 2^{n-k} = |F| \cdot 2^{n-k+1}$$

Beweis von Satz 3

- Anzahl der möglichen Teilmengen von X: $\#S = 2^n$
- durchschnittliche Größe von $M(S)$:

$$\frac{\sum_{S\subseteq X} M(S)}{\#S} = \frac{|F|\cdot 2^{n-k+1}}{2^n} = |F|\cdot 2^{1-k}$$

- $\Rightarrow$ es existiert mindestens eine Menge $S \subseteq X$ mit $M(S) \leq |F|\cdot 2^{1-k}$

Komplexität?

- Welche Laufzeit hat ein Färbungsalgorithmus?
- 1.Strategie:
  alle möglichen Kombinationen ausprobieren
- 2 Farben, n Punkte $\Rightarrow 2^n$ Kombinationen
- $\Rightarrow$ exponentielle Laufzeit
- Geht es auch schneller?
- Beispiel mit exponentieller Laufzeit:
  Färbung von Kuben

Kuben

- n-Kubus $\{0,1\}^n$, bestehend aus 2^n Vektoren
- Unterkubus $C \subseteq \{0,1\}^n$, bei dem einige Komponenten mit 0 bzw. 1 belegt sind
- Beispiel:
  - 4-Kubus $\{0,1\}^4 = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),\ldots,(1,1,1,1)\}$
  - Unterkubus $C = (0,*,1,1) = \{(0,0,1,1),(0,1,1,1)\}$
- Vektor ist genau dann gerade (ungerade), wenn er eine gerade (ungerade) Anzahl an 1-en enthält
- n-Kubus ist genau dann gültig gefärbt, wenn jeder gerade Vektor weiß und jeder ungerade Vektor schwarz gefärbt ist

Färbung der Kuben

- Wieviele Schritte werden benötigt, wenn jeder einzelne Schritt einen Unterkubus schwarz oder weiß färbt?
- Gerüst für einen Algorithmus:
  1. Zu Beginn ist kein Vektor gefärbt.
  2. Wähle in jedem Schritt einen Unterkubus und färbe alle seine Vektoren entweder weiß oder schwarz.
  3. Einmal gefärbte Vektoren behalten ihre Farbe, auch wenn ein zugehöriger Unterkubus in einem späteren Schritt gefärbt wird.

Beispiel

- eine mögliche Färbung des 4-Kubus:
  1. Färbe $(0,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0)$ und $(1,1,1,1)$ weiß.
  2. Färbe $(*,*,0,0),(*,*,1,1),(0,0,*,*)$ und $(1,1,*,*)$ schwarz, die in Teil 1 gefärbten Vektoren bleiben dabei weiß.
  3. Färbe $(*,*,*,*)$ weiß, die in Teil 2 gefärbten Vektoren bleiben dabei schwarz.

Färbung der Kuben

- 1. Strategie:
  Färbe jeden geraden Vektor einzeln weiß und danach den gesamten Kubus schwarz.
  $\Rightarrow$ Laufzeit: $2^{n-1} + 1$
- Geht es besser?
- **Satz 4:**
  Jeder Algorithmus, der einen n-Kubus färbt, benötigt mindestens $2 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$ Schritte.

Beweis der Komplexität

- **Umformung zur Rekursionsformel:**
  - sei S_n die minimale Anzahl der benötigten Schritte
  - forme $S_n \geq 2 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$ um zur Rekursion:

$$S_n \geq \frac{3}{2} S_{n-1} \text{ mit } S_1 = 2$$

  - $n = 1 \Rightarrow S_1 = 2$
  - zeige die Rekursion: $S_n \geq \frac{3}{2} S_{n-1}$

Beweis der Komplexität

- sei P der Algorithmus mit der geringsten Laufzeit, der den n-Kubus korrekt färbt
- schreibe P als Folge $(C_1, a_1), (C_2, a_2), \ldots, (C_s, a_s)$
  - im i-ten Schritt werden die Vektoren des Unterkubus C_i mit der Farbe a_i gefärbt
- $S_n = |P| =$ Anzahl der Schritte s
- betrachte die erste Komponente eines Unterkubus C_i, diese ist entweder 0 oder 1 oder $*$
- schreibe C_i als $0C'_i$ bzw. $1C'_i$ bzw. $*C'_i$

Beweis der Komplexität

- sei P_0 der Teil des Algorithmus, welcher die i Schritte enthält, bei denen die erste Komponente von C_i die 0 ist
- sei P_0^* der Teil des Algorithmus, welcher die i Schritte enthält, bei denen die erste Komponente von C_i die 0 oder $*$ ist
- analog für P_1 und P_1^*

$$\Rightarrow |P| = |P_0| + |P_1^*| = |P_1| + |P_0^*|$$

Beweis der Komplexität

- P_0^* und P_1^* lassen sich so modifizieren, dass sie den $(n-1)$-Kubus färben
  - P_0^* : weglassen der ersten Komponente von jedem Unterkubus
  - P_1^* : weglassen der ersten Komponente von jedem Unterkubus und vertauschen der beiden Farben

$$\Rightarrow S_n = |P| \geq S_{n-1} + max(|P_0|, |P_1|)$$

- es bleibt noch zu zeigen: $max(|P_0|, |P_1|) \geq \frac{1}{2} S_{n-1}$
- dazu reicht es zu zeigen: $|P_0| + |P_1| \geq S_{n-1}$

Beweis der Komplexität

- Modifikation von P zu P', so dass der Algorithmus P' den $(n-1)$-Kubus korrekt färbt
  - entferne alle Schritte (C_i, a_i) mit $C_i = *C'_i$
  - entferne bei den verbleibenden Unterkuben C_i die erste Komponente
  - vertausche die Farbe a_i, wenn $C_i = 1C'_i$ ist
- Laufzeit von $P' : |P_0| + |P_1|$
  - Laufzeit von $P : |P_0| + |P_1| + |P^*|$
  - alle Schritte mit $(*C'_i, a_i)$ wurden entfernt

Beweis der Komplexität

- Korrektheit der Modifikation von P zu P'
- entferne alle Schritte (C_i, a_i) mit $C_i = *C_i'$
  - sei y ein Vektor aus dem $(n-1)$-Kubus
  - y werde zum ersten Mal in Schritt i gefärbt
  - dann gilt: $C_i \neq *C_i'$, da sonst $0y$ und $1y$ dieselbe Farbe erhalten würden
  - $\Rightarrow$ eine weitere Färbung von C_j' mit $C_j' = C_i'$ und $j > i$ ist nicht notwendig und muss daher entfernt werden
- vertausche die Farbe a_i, wenn $C_i = 1C_i'$ ist
  - eine 1 weniger $\Rightarrow$ andere Farbe, da die Farbe der Vektoren an die Anzahl der 1-en gekoppelt ist

Zusammenfassung

- Färbbarkeit ist u.a. abhängig
  - vom Durchschnitt der einzelnen Teilmengen
  - von der Größe der einzelnen Teilmengen
  - von der Anzahl der einzelnen Teilmengen
- Färbungsalgorithmen haben im Allgemeinen exponentielle Laufzeit