Systems of Distinct Representatives

Seminar: Extremal Combinatorics

Peter Fritz

Lehr- und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
RWTH Aachen

Gliederung

- Einführung
- Anwendung: Lateinische Quadrate
- Maximale Matchings in bipartiten Graphen
- Zusammenfassung, Ausblick

Einführung

- Heiratsproblem:
  gegeben: m Frauen, n Männer, $m \leq n$
  Frau heiratet nur Mann, den sie kennt
  nur monogame Ehen erlaubt
  gesucht: alle Frauen verheiraten

Einführung

- Heiratsproblem:

  gegeben: m Frauen, n Männer, $m \leq n$

  Frau heiratet nur Mann, den sie kennt

  nur monogame Ehen erlaubt

  gesucht: alle Frauen verheiraten
- als Graphproblem formalisierbar:

  finde maximales Matching in bipartiten Graph $G = (F, M, E)$

Einführung

- Heiratsproblem:

  gegeben: m Frauen, n Männer, $m \leq n$

  Frau heiratet nur Mann, den sie kennt

  nur monogame Ehen erlaubt

  gesucht: alle Frauen verheiraten
- als Graphproblem formalisierbar:

  finde maximales Matching in bipartiten Graph $G = (F, M, E)$
- wann ist Heirat, bzw. Matching von F nach M möglich?

Systems of Distinct Representatives, SDR

- formulieren Heiratsproblem als Mengenproblem:

  Frauen: $S_1, \ldots, S_m$

  Männer, die die i-te Frau kennt:

  $S_i = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$

Systems of Distinct Representatives, SDR

- formuliere Heiratsproblem als Mengenproblem:

  Frauen: $S_1, \ldots, S_m$

  Männer, die die i-te Frau kennt:

  $S_i = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$
- DEF: $x_1, \ldots, x_m$ sind ein SDR von $S_1, \ldots, S_m$ $\Leftrightarrow x_i \in S_i$ für $1 \leq i \leq m$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

Systems of Distinct Representatives, SDR

- formuliere Heiratsproblem als Mengenproblem:

  Frauen: $S_1, \ldots, S_m$

  Männer, die die i-te Frau kennt:

  $S_i = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$
- DEF: $x_1, \ldots, x_m$ sind ein SDR von $S_1, \ldots, S_m$ $\Leftrightarrow x_i \in S_i$ für $1 \leq i \leq m$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$
- Zuordnung der Mengen zu Elementen ist injektive „Heiratsabbildung“:

  $f(S_i) \neq f(S_j)$ für $i \neq j$

Beispiel

$$\{1,\ 3\ , 4, 5\}$$

$$\{\ 2\ , 4, 5, 6\}$$

$$\{3,\ 4\ \}$$

$$\{3, 4,\ 5\ \}$$

Beispiel

$$\{1, 3, 4, 5\}$$

$$\{2, 4, 5, 6\}$$

$$\{3, 4\}$$

$$\{3, 4, 5\}$$

Satz von Hall (1935)

- Hall-Bedingung:

$$\boxed{\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I| \text{ für alle } I \subseteq \{1,\ldots,m\}} \qquad (1)$$

- $S_1, S_2, \ldots, S_m$ besitzen SDR $\Leftrightarrow$ wenn (1) zutrifft

Satz von Hall (1935)

- Hall-Bedingung:

$$\boxed{\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I| \text{ für alle } I \subseteq \{1,\ldots,m\}} \qquad (2)$$

- $S_1, S_2, \ldots, S_m$ besitzen SDR $\Leftrightarrow$ wenn (1) zutrifft

Beweis:

$\Leftarrow$: klar

$\Rightarrow$: per Induktion über m

Beweis zum Satz von Hall(I)

Fall 1: falls

$$\left|\bigcup_{i \in I} S_i\right| > |I| \text{ für alle } I \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

Beweis zum Satz von Hall(I)

Fall 1: falls

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| > |I| \text{ für alle } I \subseteq \{1,\ldots,m\}$$

- Ordne irgendeiner Menge $S_{i_{m+1}}$ einen beliebigen Repräsentanten $x_i \in S_{i_{m+1}}$ zu
- entferne x_i aus den restlichen Mengen

Beweis zum Satz von Hall(I)

Fall 1: falls

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| > |I| \text{ für alle } I \subseteq \{1,\ldots,m\}$$

- Ordne irgendeiner Menge $S_{i_{m+1}}$ einen beliebigen Repräsentanten $x_i \in S_{i_{m+1}}$ zu
- entferne x_i aus den restlichen Mengen
- Vereinigung von k beliebigen S_i der restlichen m Mengen besitzt immer noch mindestens k Elemente und erfüllt (1) $\surd$

Beweis zum Satz von Hall(II)

Fall 2: Für k der S_i mit $1 \leq k \leq m$ gilt:

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| = |J| = k \text{ für alle } J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

Beweis zum Satz von Hall(II)

Fall 2: Für k der S_i mit $1 \leq k \leq m$ gilt:

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| = |J| = k \text{ für alle } J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

- wegen $k < m$ besitzen diese Mengen ein SDR
- entferne diese k Repräsentanten aus den restlichen $m + 1 - k$ Mengen

Beweis zum Satz von Hall(II)

Fall 2: Für k der S_i mit $1 \leq k \leq m$ gilt:

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| = |J| = k \text{ für alle } J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

- wegen $k < m$ besitzen diese Mengen ein SDR
- entferne diese k Repräsentanten aus den restlichen $m + 1 - k$ Mengen
- bleibt zu zeigen: diese Mengen erfüllen (1) und besitzen SDR
- bildet mit den anderen k Repräsentanten ein gemeinsames SDR

Beweis zum Satz von Hall(II)

Fall 2: Für k der S_i mit $1 \leq k \leq m$ gilt:

$$\left|\bigcup_{i \in J} S_i\right| = |J| = k \text{ für alle } J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

- wegen $k < m$ besitzen diese Mengen ein SDR
- entferne diese k Repräsentanten aus den restlichen $m + 1 - k$ Mengen
- bleibt zu zeigen: diese Mengen erfüllen (1) und besitzen SDR
- bildet mit den anderen k Repräsentanten ein gemeinsames SDR
- Falls s der restlichen $m + 1 - k$ Mengen weniger als s Elemente besitzen:

  Vereinigung dieser s Mengen mit den ersten k Mengen haben weniger als $s + k$ Elemente

  Widerspruch zur Induktionsvorraussetzung

$\square$

Nachweis der Hall-Bedingung

- zu aufwendig, da alle 2^m Teilmengen der S_i zu überprüfen sind
- Satz von König (1931):
  Größe eines Maximum Matchings in $G = (A, B, E)$ = Größe des minimalen Vertex-Covers
- Min-Vertex-Cover ist aber NP-vollständig

Nachweis der Hall-Bedingung

- zu aufwendig, da alle 2^m Teilmengen der S_i zu überprüfen sind
- Satz von König (1931):
  Größe eines Maximum Matchings in $G = (A, B, E)$ = Größe des minimalen Vertex-Covers
- Min-Vertex-Cover ist aber NP-vollständig
- es gibt einfache Spezialfälle

Korollar

Falls

- $S_1, \ldots, S_m$ jeweils r Elemente besitzen
- $\left| \bigcup_{1 \leq i \leq m} S_i \right| = n$ gilt
- alle Elemente der S_i in der selben Anzahl d von Mengen enthalten sind

besitzen $S_1, \ldots, S_m$ ein SDR.

Beweis des Korrolar(I)

Beweis: Zähle die Anzahl des Enthaltenseins von Elementen in Mengen:

- die m S_i besitzen r Elemente:
  $|S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m| = m \cdot r$

Beweis des Korrolar(I)

Beweis: Zähle die Anzahl des Enthaltenseins von Elementen in Mengen:

- die m S_i besitzen r Elemente:
  $|S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m| = m \cdot r$
- jedes der n Elemente in genau d Mengen:
  $m \cdot r = n \cdot d$ (doppeltes Abzählen)
- wegen $m \leq n$ muss, $d \leq r$ gelten

Beweis des Korrolar(II)

falls $S_1, \ldots, S_m$ kein SDR besitzen gilt $d > r$:

Beweis des Korrolar(II)

falls $S_1, \ldots, S_m$ kein SDR besitzen gilt $d > r$:

- wegen Hall verletzen $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ (1)
- $Y := |S_{i1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| < k$

Beweis des Korrolar(II)

falls $S_1, \ldots, S_m$ kein SDR besitzen gilt $d > r$:

- wegen Hall verletzen $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ (1)
- $Y := |S_{i1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| < k$
- $r \cdot k = \sum_{j=1}^{k} |S_{i_j}| = |Y| \cdot d < k \cdot d$

$\Rightarrow$ Widerspruch $d > r$

$\square$

gute Jungen, böse Jungen

- r der n Jungen sind äußerst unbeliebt
- Ziel: so viele glückliche Hochzeiten, wie möglich
- Ist es möglich, *höchstens* t unglückliche Hochzeiten zu haben?

gute Jungen, böse Jungen

- r der n Jungen sind äußerst unbeliebt
- Ziel: so viele glückliche Hochzeiten, wie möglich
- Ist es möglich, *höchstens* t unglückliche Hochzeiten zu haben?
- Verallgemeinerung des Heiratsproblems
- gute Elemente: blau, schlechte Elemente: rot
- Chvátal und Szemerédi zeigten 1988:

Satz von Chvátal-Szemerédi

$S_1, \ldots, S_m$ haben genau dann ein SDR mit höchstens t roten Elementen,

- wenn sie ein SDR besitzen
- für alle $1 \leq k \leq m$ die Vereinigung von k beliebigen Mengen mindestens $k - t$ blaue Elemente besitzt. (*)

Satz von Chvátal-Szemerédi

$S_1, \ldots, S_m$ haben genau dann ein SDR mit höchstens t roten Elementen,

- wenn sie ein SDR besitzen
- für alle $1 \leq k \leq m$ die Vereinigung von k beliebigen Mengen mindestens $k - t$ blaue Elemente besitzt. (*)

Beweis: $\Leftarrow$: klar

$\Rightarrow$:

- sei R Menge der roten Elemente mit $|R| > t$

Satz von Chvátal-Szemerédi

$S_1, \ldots, S_m$ haben genau dann ein SDR mit höchstens t roten Elementen,

- wenn sie ein SDR besitzen
- für alle $1 \leq k \leq m$ die Vereinigung von k beliebigen Mengen mindestens $k - t$ blaue Elemente besitzt. (*)

Beweis: $\Leftarrow$: klar

$\Rightarrow$:

- sei R Menge der roten Elemente mit $|R| > t$
- erweitere $S_1, \ldots, S_m$ zu $S_1, \ldots, S_m, S_{m+1}, \ldots, S_{m+r}$

  mit $r = |R| - t$ Kopien von $|R|$

Beweis (Fortsetzung)

- $S_1, \ldots, S_{m+r}$ haben ein SDR

  $\Rightarrow S_1, \ldots, S_m$ haben ein SDR höchstens t roten Elementen:

Beweis (Fortsetzung)

- $S_1, \ldots, S_{m+r}$ haben ein SDR

  $\Rightarrow S_1, \ldots, S_m$ haben ein SDR höchstens t roten Elementen:
- zeige Hall-Bedingung für erweiterte Mengenfolge

  mit Indizes $I \subseteq \{1, \ldots, m+r\}$ und $|I| = k$:

Beweis (Fortsetzung)

- $S_1, \ldots, S_{m+r}$ haben ein SDR

  $\Rightarrow S_1, \ldots, S_m$ haben ein SDR höchstens t roten Elementen:

- zeige Hall-Bedingung für erweiterte Mengenfolge

  mit Indizes $I \subseteq \{1, \ldots, m+r\}$ und $|I| = k$:

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right|$$

Beweis (Fortsetzung)

- $S_1, \ldots, S_{m+r}$ haben ein SDR

  $\Rightarrow S_1, \ldots, S_m$ haben ein SDR höchstens t roten Elementen:

- zeige Hall-Bedingung für erweiterte Mengenfolge

  mit Indizes $I \subseteq \{1, \ldots, m+r\}$ und $|I| = k$:

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| = \left| \bigcup_{i \in I} (S_i - R) \right| + |R|$$

Beweis (Fortsetzung)

- $S_1, \ldots, S_{m+r}$ haben ein SDR

  $\Rightarrow S_1, \ldots, S_m$ haben ein SDR höchstens t roten Elementen:

- zeige Hall-Bedingung für erweiterte Mengenfolge

  mit Indizes $I \subseteq \{1, \ldots, m+r\}$ und $|I| = k$:

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right| &= \left|\bigcup_{i \in I} (S_i - R)\right| + |R| \\ &\geq^{(*)} k - t + |R| \end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung)

- $S_1, \ldots, S_{m+r}$ haben ein SDR

  $\Rightarrow S_1, \ldots, S_m$ haben ein SDR höchstens t roten Elementen:
- zeige Hall-Bedingung für erweiterte Mengenfolge

  mit Indizes $I \subseteq \{1, \ldots, m+r\}$ und $|I| = k$:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| &= \left| \bigcup_{i \in I} (S_i - R) \right| + |R| \\ &\geq^{(*)} k - t + |R| \geq k = |I| \end{aligned}$$

$\square$

Lateinische Rechtecke

- Anwendung von Korollar
- sehr altes kombinatorisches Problem (2800 v.Chr.)

Lateinische Rechtecke

- Anwendung von Korollar
- sehr altes kombinatorisches Problem (2800 v.Chr.)

DEF: lateinisches Rechteck: $r \times n$ Matrix mit $r \leq n$ in der die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in jeder Zeile genau und in jeder Spalte höchstens einmal auftreten.

Lateinische Rechtecke

- Anwendung von Korollar
- sehr altes kombinatorisches Problem (2800 v.Chr.)

DEF: lateinisches Rechteck: $r \times n$ Matrix mit $r \leq n$ in der die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in jeder Zeile genau und in jeder Spalte höchstens einmal auftreten.

- lateinisches Quadrat: $r = n$
- Aufgabe: leeres Rechteck mit Zahlen Auffüllen
- bereits ab n Einträgen kann Vervollständigung nicht mehr möglich sein

Beispiel

1	5	2	4	?
				3

Abbildung 1: unvollständiges Lateinische Rechteck, und vollständiges Lateinisches Quadrat

Beispiel

1	5	2	4	?
				3

5	4	3	2	1

Abbildung 2: unvollständiges Lateinische Rechteck, und vollständiges Lateinisches Quadrat

Beispiel

1	5	2	4	?
				3

5	4	3	2	1
2	1	5	4	3

Abbildung 3: unvollständiges Lateinische Rechteck, und vollständiges Lateinisches Quadrat

Beispiel

1	5	2	4	?
				3

5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

Abbildung 4: unvollständiges Lateinische Rechteck, und vollständiges Lateinisches Quadrat

Beispiel

1	5	2	4	?
				3

5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4

Abbildung 5: unvollständiges Lateinische Rechteck, und vollständiges Lateinisches Quadrat

Satz von Ryser (1951)

Jedes $r \times n$ Lateinische Rechteck R zu einem $(r+1) \times n$ Rechteck erweiterbar, falls $r < n$

Satz von Ryser (1951)

Jedes $r \times n$ Lateinische Rechteck R zu einem $(r+1) \times n$ Rechteck erweiterbar, falls $r < n$

Beweis:

- Seien $S_i =$ $\{x_i | x_i$ ist *nicht* in der *i*-ten Spalte von *R* enthalten$\}$

Satz von Ryser (1951)

Jedes $r \times n$ Lateinische Rechteck R zu einem $(r+1) \times n$ Rechteck erweiterbar, falls $r < n$

Beweis:

- Seien $S_i =$ $\{x_i | x_i$ ist *nicht* in der *i*-ten Spalte von *R* enthalten$\}$
- Zeige: $S_1, \ldots, S_n$ besitzen SDR
- definiere diese Repräsentanten als $r+1$. Zeile $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von R

Beweis zum Satz von Ryser

wegen Korollar besitzen $S_1, \ldots, S_n$ ein SDR, da:

Beweis zum Satz von Ryser

wegen Korollar besitzen $S_1, \ldots, S_n$ ein SDR, da:

- $S_1, \ldots, S_n$ sind $n - r$ elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge
- jedes Element $x_j \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i$ ist in genau $n - r$ S_i enthalten, da es bereits in r anderen Spalten eingefügt wurde

$\square$

Beweis zum Satz von Ryser

wegen Korollar besitzen $S_1, \ldots, S_n$ ein SDR, da:

- $S_1, \ldots, S_n$ sind $n - r$ elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge
- jedes Element $x_j \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i$ ist in genau $n - r$ S_i enthalten, da es bereits in r anderen Spalten eingefügt wurde

$\square$

weitere Anwendungen von lateinischen Rechtecken:

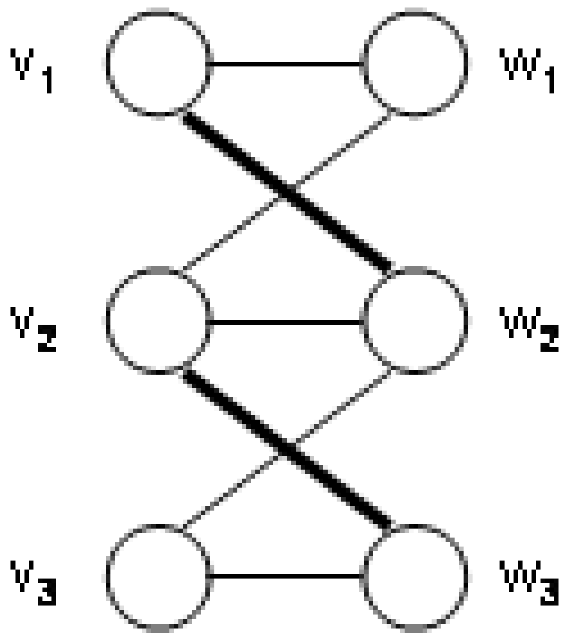
- Scheduling-Theorie
- statistische Experimente
- kryptographische Protokolle

Matchings in bipartiten Graphen

- Nachweis mit Hall und König schwierig und gibt nur Aussage bzgl. Existenz
- Gesucht: effizienter Algorithmus

Matchings in bipartiten Graphen

- Nachweis mit Hall und König schwierig und gibt nur Aussage bzgl. Existenz
- Gesucht: effizienter Algorithmus
- hier: Algorithmus basierend auf lokaler Suche
- Greedy-Ansatz führt nicht zum Ziel:



Nachbarschaft

DEF: Erweiternder Pfad bzgl. Matching M:

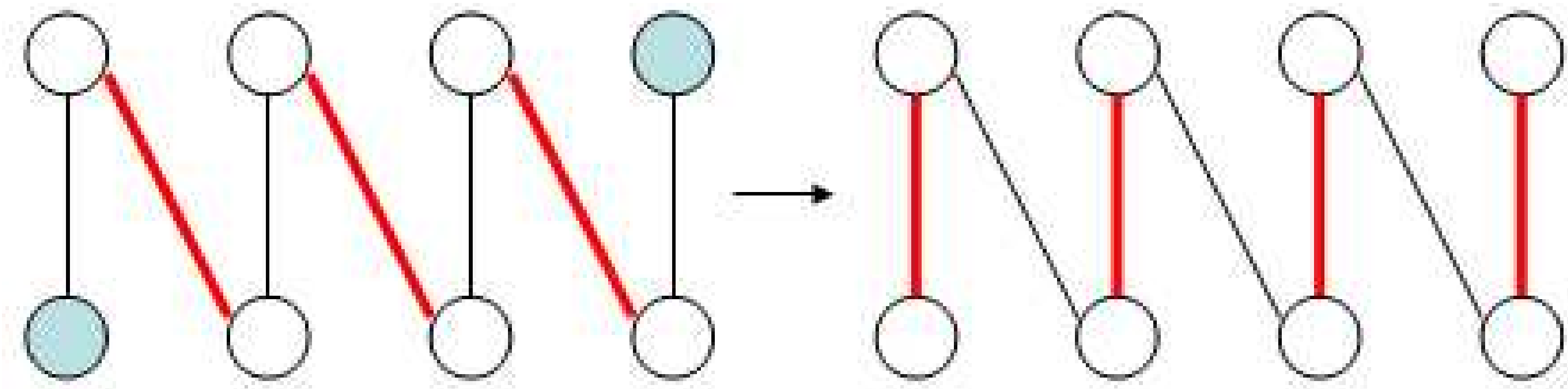
- Pfad, dessen Kanten abwechselnd gematched und frei sind
- Start- und Zeilknoten liegen nicht in M

Nachbarschaft

DEF: Erweiternder Pfad bzgl. Matching M:

- Pfad, dessen Kanten abwechselnd gematched und frei sind
- Start- und Zeilknoten liegen nicht in M

Verbesserung möglich:

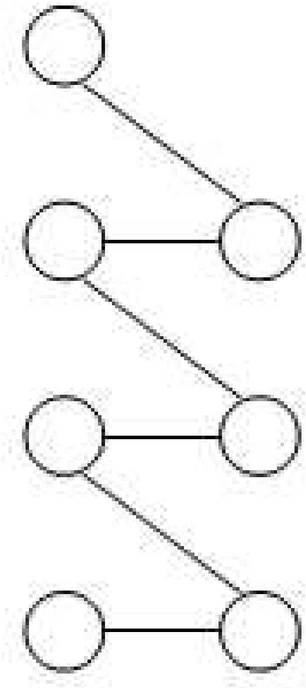


Ford-Fulkerson

- Mögliche Lösung: mit Ford-Fulkerson Algorithmus
- Problem: verbessernde Pfade sind auf Netzwerken anders definiert

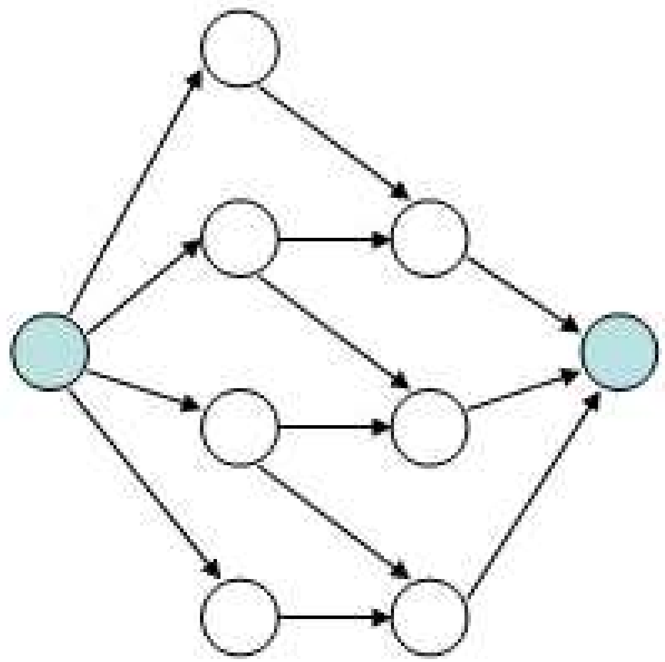
Ford-Fulkerson

- Mögliche Lösung: mit Ford-Fulkerson Algorithmus
- Problem: verbessernde Pfade sind auf Netzwerken anders definiert



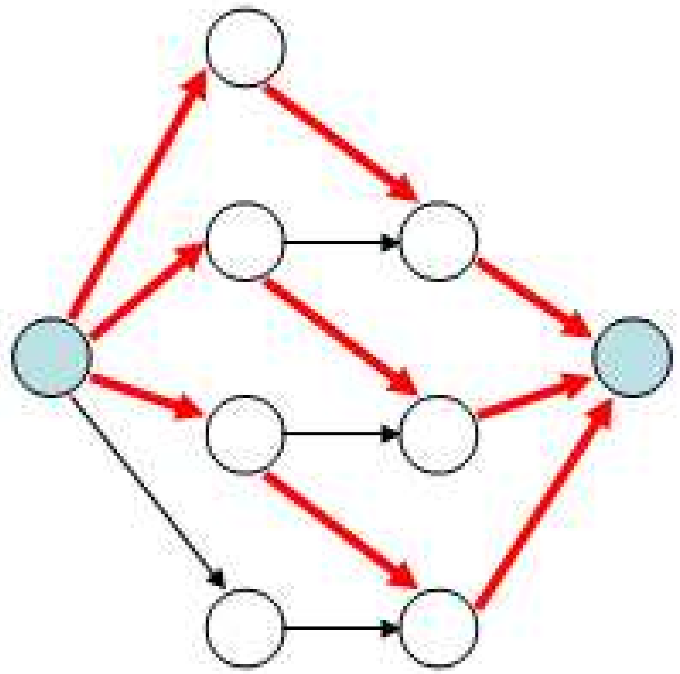
Ford-Fulkerson

- Mögliche Lösung: mit Ford-Fulkerson Algorithmus
- Problem: verbessernde Pfade sind auf Netzwerken anders definiert



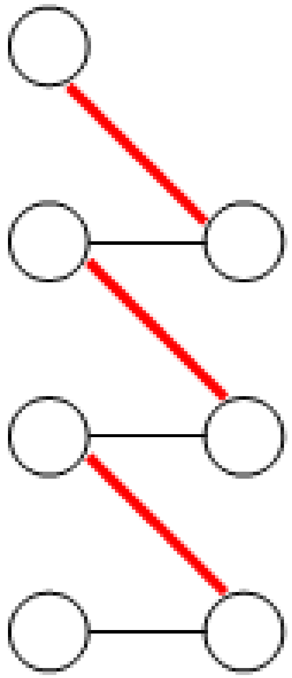
Ford-Fulkerson

- Mögliche Lösung: mit Ford-Fulkerson Algorithmus
- Problem: verbessernde Pfade sind auf Netzwerken anders definiert



Ford-Fulkerson

- Mögliche Lösung: mit Ford-Fulkerson Algorithmus
- Problem: verbessernde Pfade sind auf Netzwerken anders definiert



Satz von Berger

bleibt zu zeigen, dass verbessernde Pfade hinreichend für Optimalität eines Matchings ist

Satz von Berger

bleibt zu zeigen, dass verbessernde Pfade hinreichend für Optimalität eines Matchings ist

Satz (Berger, 1957)

Ein Matching M in einem Graph G ist genau dann maximal, wenn es keinen erweiternden Pfad in G gibt.

Satz von Berger

bleibt zu zeigen, dass verbessernde Pfade hinreichend für Optimalität eines Matchings ist

Satz (Berger, 1957)

Ein Matching M in einem Graph G ist genau dann maximal, wenn es keinen erweiternden Pfad in G gibt.

Beweis: $\Leftarrow$: klar

$\Rightarrow$

- Angenommen es gäbe ein Matching M' mit $|M| < |M'|$

Satz von Berger

bleibt zu zeigen, dass verbessernde Pfade hinreichend für Optimalität eines Matchings ist

Satz (Berger, 1957)

Ein Matching M in einem Graph G ist genau dann maximal, wenn es keinen erweiternden Pfad in G gibt.

Beweis: $\Leftarrow$: klar

$\Rightarrow$

- Angenommen es gäbe ein Matching M' mit $|M| < |M'|$
- Sei $H := M \oplus M' := (M \cup M') \setminus (M \cap M')$ exklusive Vereinigung $\oplus$ beider Mengen
- keine Kante liegt in zwei Matchings

Beweis, Fortsetzung(I)

- da $|M| < |M'|$ gibt es Zusammenhangskomponente G' in der weniger Knoten zu M gehören, als zu M' (*)

Beweis, Fortsetzung(I)

- da $|M| < |M'|$ gibt es Zusammenhangskomponente G' in der weniger Knoten zu M gehören, als zu M' (*)
- alle Knoten in M und M' haben Grad eins

  $\longrightarrow$ alle Knoten in G' haben höchstens Grad zwei
- G' besteht aus Zyklus gerader Länge, oder Pfad über alle Knoten

Beweis, Fortsetzung(II)

- wegen (*) besteht G' aus genau einem Pfad P

Beweis, Fortsetzung(II)

- wegen (*) besteht G' aus genau einem Pfad P
- Anfangs- und Endknoten von P müssen wegen (*) in M' liegen
- keine 2 Kanten desselben Matchings direkt hintereinander

Beweis, Fortsetzung(II)

- wegen (*) besteht G' aus genau einem Pfad P
- Anfangs- und Endknoten von P müssen wegen (*) in M' liegen
- keine 2 Kanten desselben Matchings direkt hintereinander
- P ist bezüglich M erweiternder Pfad, da Anfangs- und Endknoten frei

  und Kanten abwechselnd frei und gematched

$\square$

Algorithmus für Matching Problem

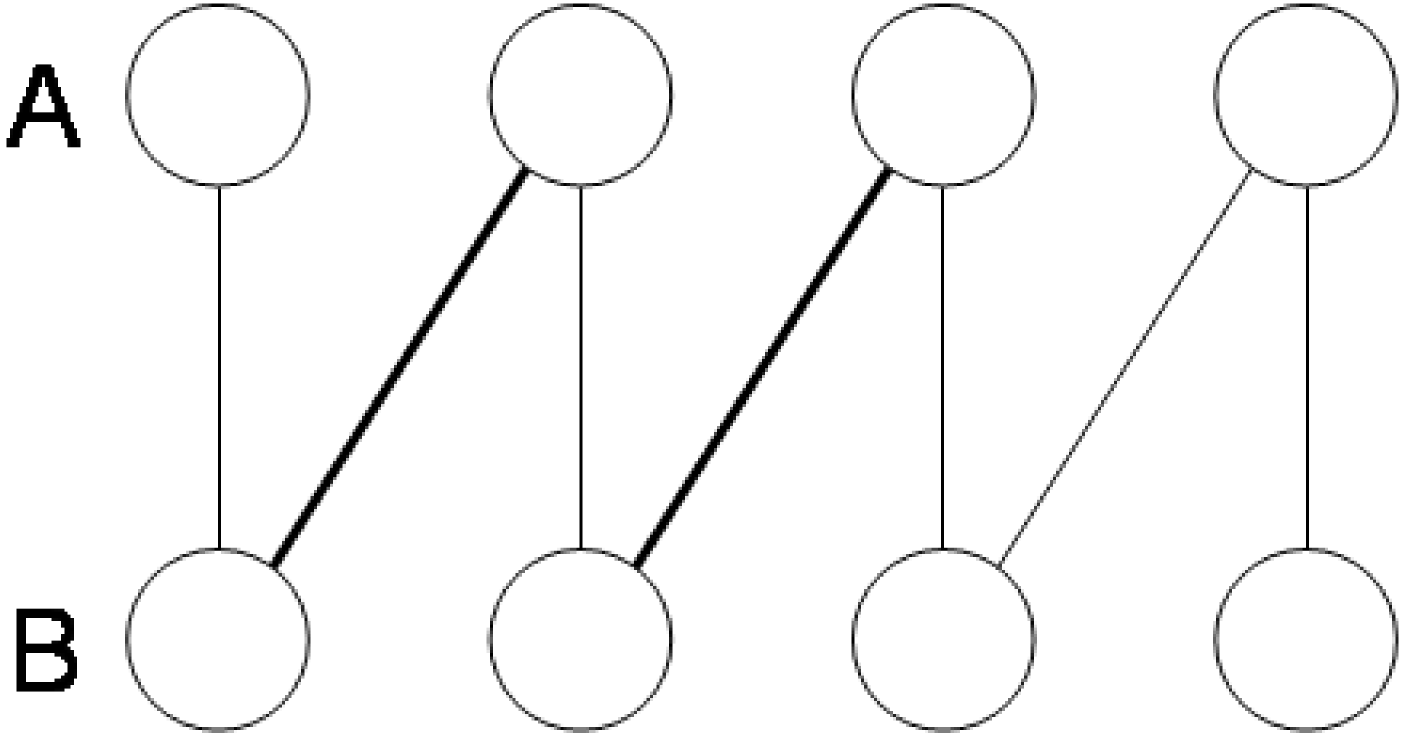
Idee:

- Kanten im Graph richten: Matching-Kanten von A nach B, andere von B nach A
- starte von freien Knoten Tiefensuche, um verbessernden Pfad zu finden
- erweitere Matching, falls verbessernden Pfad gefunden

Algorithmus, Schritt 1

Eingabe: $G = (A, B, E)$
$M := \emptyset$; $\{M$ ist das aktuelle Matching$\}$

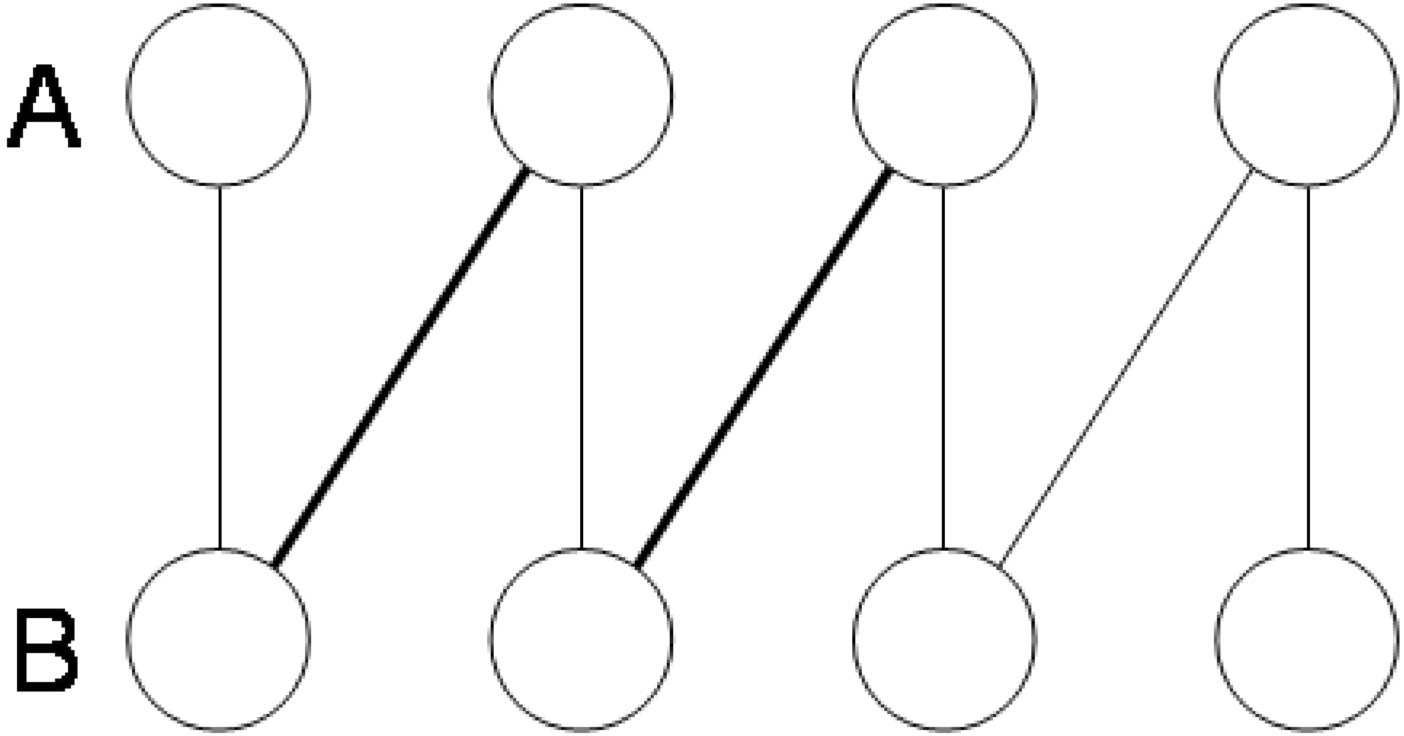
Begleitendes Beispiel



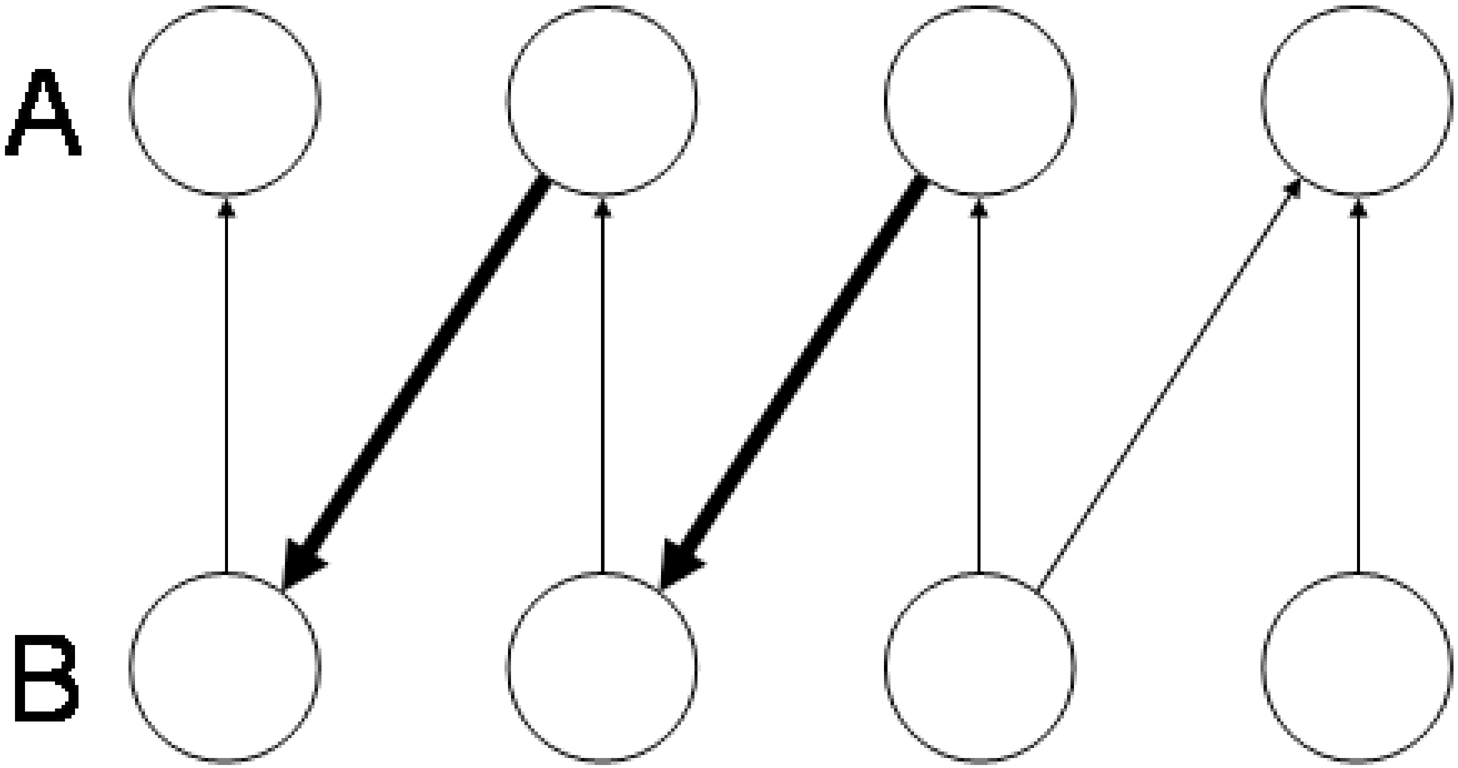
Algorithmus, Schritt 2

Eingabe: $G = (A, B, E)$
$M := \emptyset$; {M ist das aktuelle Matching}
{Richte alle Kanten $e \in M$ von A nach B und die restlichen von B nach A}
for all $e \in E$ **do**
  if $e \in M$ **then**
    $e := (a, b)$; {für $a \in A$ und $b \in B$}
  else
    $e := (b, a)$;
  end if
end for

Beispiel zu Schritt 2



Beispiel zu Schritt 2



Algorithmus, Schritt 3

{definiere A_0 und B_0, die alle freien Knoten aus A und B enthalten}

$A_0 := B_0 := \emptyset$;

for all $v \in A$ und $v \notin M$ **do**

  $A_0 := A_0 \cup \{v\}$;

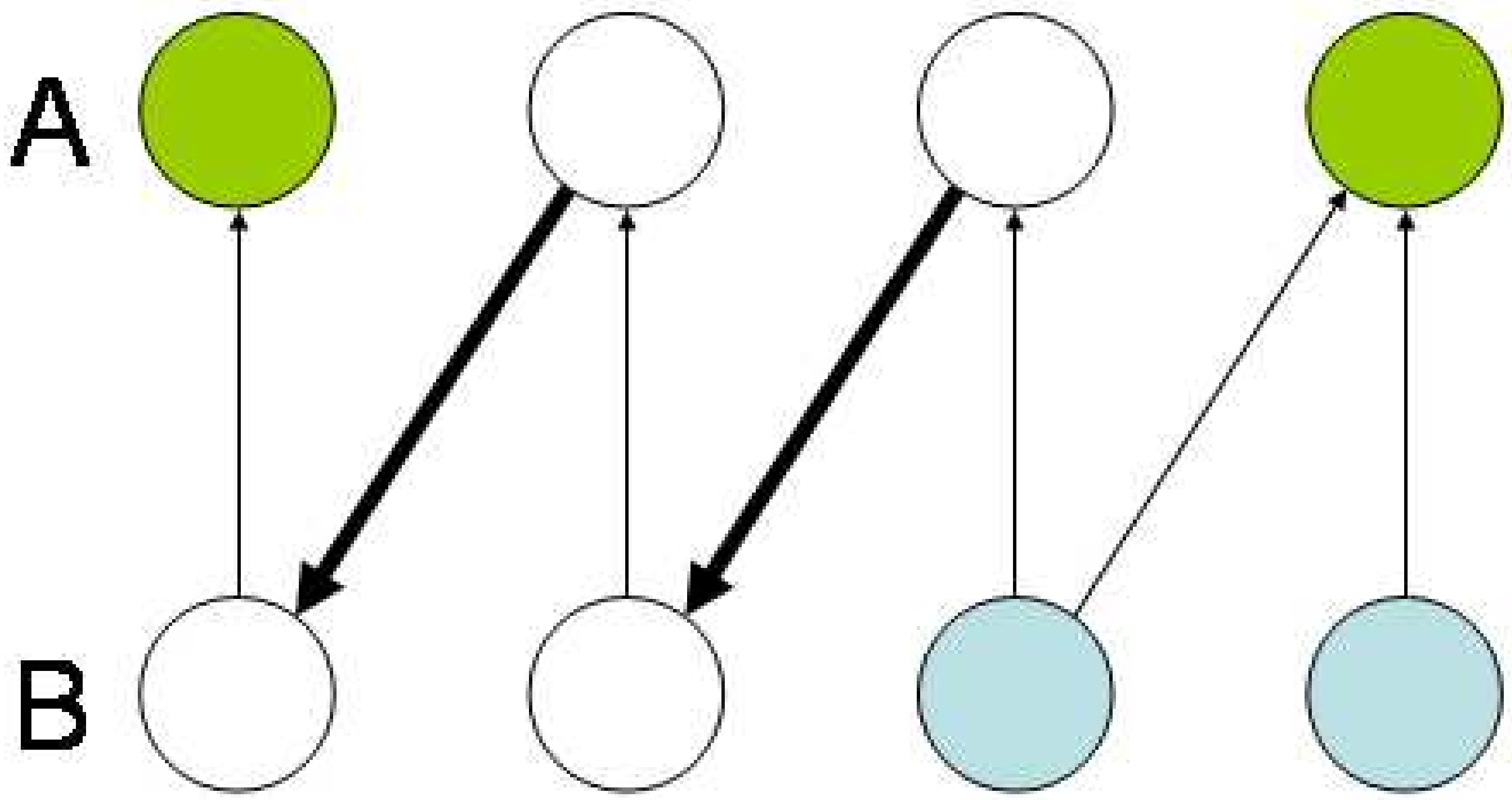
end for

for all $v \in B$ und $v \notin M$ **do**

  $B_0 := B_0 \cup \{v\}$;

end for

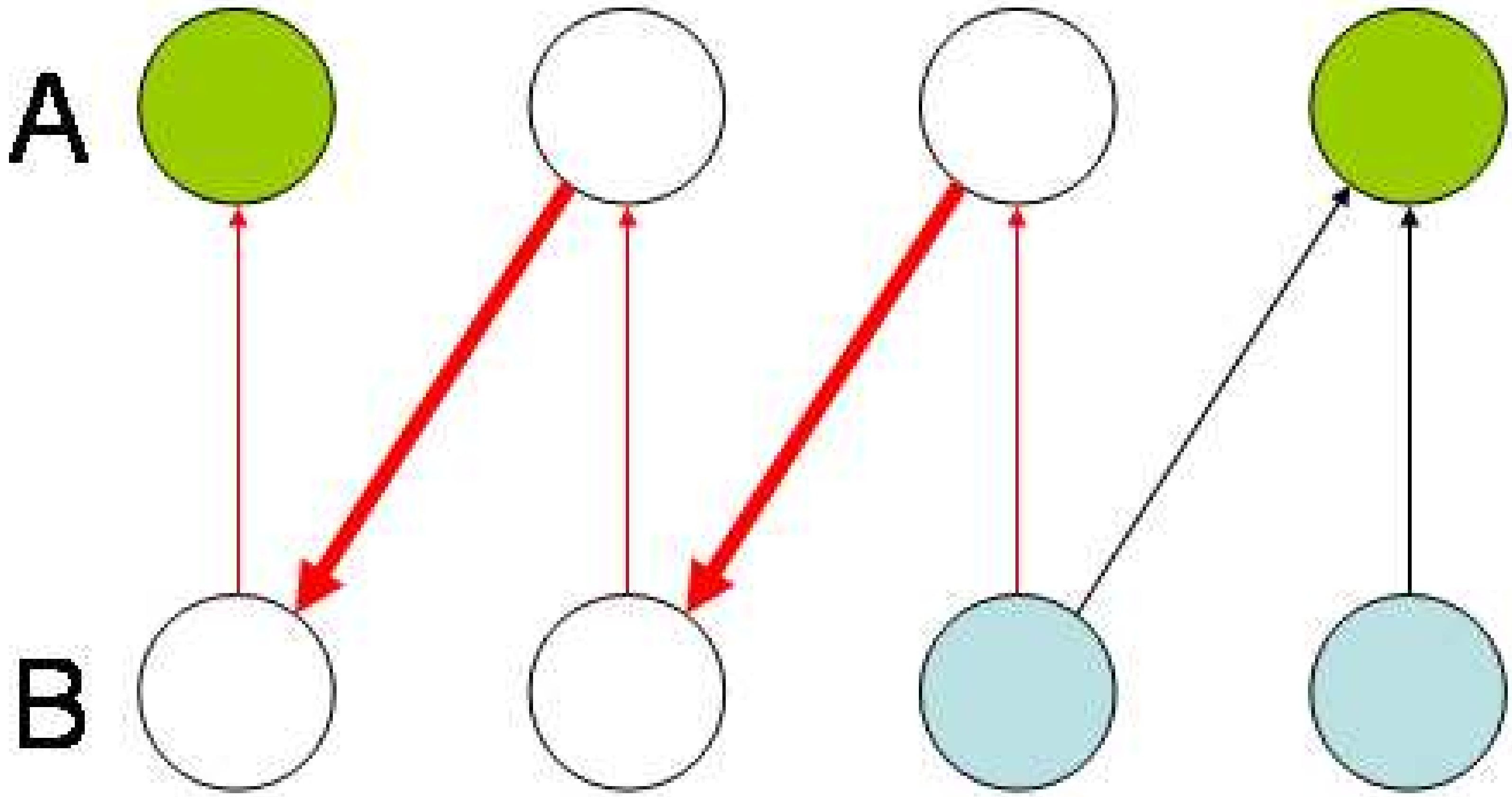
Beispiel zu Schritt 3



Algorithmus, Schritt 4

for all $v \in B_0$ **do**
starte Tiefensuche von v bis ein $w \in A_0$ gefunden wurde;
{der Pfad $v \rightsquigarrow w$ ist ein erweiternder Pfad}
end for

Beispiel zu Schritt 2



Algorithmus, Schritt 4

for all $v \in B_0$ **do**
  starte Tiefensuche von v bis ein $w \in A_0$
  gefunden wurde;
  {der Pfad $v \rightsquigarrow w$ ist ein erweiternder Pfad}
end for
if erweiternder Pfad gefunden **then**
  update M;
  gehe zu Schritt 2;
else
  Output M;
end if

Laufzeitanalyse

- nach jeder Iteration von Schritt zwei wird M um eins größer
  $\Rightarrow n/2$ Durchläufe

Laufzeitanalyse

- nach jeder Iteration von Schritt zwei wird M um eins größer
  $\Rightarrow n/2$ Durchläufe
- Tiefensuche auf $n/2$ Knoten aus B_0

Laufzeitanalyse

- nach jeder Iteration von Schritt zwei wird M um eins größer
  $\Rightarrow n/2$ Durchläufe
- Tiefensuche auf $n/2$ Knoten aus B_0
- Tiefensuchlauf enthält abwechselnd freie Knoten und Matchingknoten
  $\Rightarrow$ Tiefensuche ist linear

Laufzeitanalyse

- nach jeder Iteration von Schritt zwei wird M um eins größer
  $\Rightarrow n/2$ Durchläufe
- Tiefensuche auf $n/2$ Knoten aus B_0
- Tiefensuchlauf enthält abwechselnd freie Knoten und Matchingknoten
  $\Rightarrow$ Tiefensuche ist linear
- Gesamtlaufzeit $O(n^3)$

Laufzeitanalyse

- nach jeder Iteration von Schritt zwei wird M um eins größer
  $\Rightarrow n/2$ Durchläufe
- Tiefensuche auf $n/2$ Knoten aus B_0
- Tiefensuchlauf enthält abwechselnd freie Knoten und Matchingknoten
  $\Rightarrow$ Tiefensuche ist linear
- Gesamtlaufzeit $O(n^3)$
- es gibt schnellere, trickreichere Algorithmen, z.B. $O(n^{5/2})$ Algorithmus von Hopcroft und Karp

Zusammenfassung

- Heiratsproblem
- Satz von Hall
- Verallgemeinerungen und Spezialfälle des Heiratsproblems
- Lateinische Quadrate
- Algorithmen zum Lösen von Maximum Matching Problemen in bipartiten Graphen

Ausblick

- Matchings in nicht bipartiten Graphen
- Gewichtete Matchings: Zuordnung mit Präferenzen
- Matchings als Werkzeuge zur Algorithmenkonstruktion:

  Christofides-Algorithmus

  Berechnen von Min-Vertex-Cover
- SDR als Werkzeug für Beweise:

  Beweis von unteren Schranken

  Probleme in Hypergraphen