Das Schubfachprinzip

Yan Zhang

07.05.2004

1 Einleitung

Das Schubfachprinzip: Wenn man mehr als kn Elemente auf n Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach, das mehr als k Objekte enthält.

Dise sofort einleuchtende Tatsache wird als Schubfachprinzip (engl. Pigeonhole principle) bezeichnet. Formal lässt sich das Schubfachprinzip auch so ausdrücken: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und gilt $|X| > |Y|$, so gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq 2$. Es ist einfach zu verifizieren. Wenn jedes Fach maximal k Elemente enthält, dann gibt es am höchstens kn Elemente. Widerspruch zu der Existenz von mehr als kn Elemente.

Das Schubfachprinzip drückt die Existenz des Schubfachs mit mehr als k Elemente aus. Aber wir wissen noch nicht, wie wir solch Schubfach finden können. Heutige Zeit haben wir kräftige und weit reichende Verallgemeinerung dies Prinzips: Ramsey-like Theorem, die probabilistic Methode.

2 Warm-up

Definition 1
Der Grad (engl. degree) von einem Knoten x bezeichnet die Anzahl $d(x)$ der Kanten von G, die zu x inzident sind.

Behauptung 1
In jedem Graph existiert immer 2 *Knoten mit dem gleichen Grad.*

Beweis. Gegeben sei ein Graph mit n Knoten. Wir markieren die n Fächer mit den Zahlen 0 bis $n-1$. Das Knoten x befindet sich in dem k-ten Schubfach, wenn es genau den Grad k hat. Wir wollen beweisen, dass es ein Fach gibt, das mehr als ein Knoten enthält. Wir nehmen es so an, dass es kein solches Fach gibt, das mehr als ein Knoten hat. Es gibt n Fächer und n Elemente. Deshalb enthält jedes Fach genau ein Element. Sei Knoten x im Fach 0. Das

Knoten hat den Grad 0. Sei Knoten y im Fach $n-1$. Aber y hat den Grad $n-1$. Deshalb ist y mit übrigen Knoten verbunden, inklusive x. Das Knoten x ist nicht mit anderen Knoten verbunden, inklusive Knoten y. Damit haben wir Widerspruch. $\square$

Definition 2
Sei G ein endlicher Graph. Das independence number $\alpha(G)$ ist die maximale Anzahl der paarweise nicht adjazenten Knoten von G. Das chromatic number $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl der Farben von den Knoten des Graphs G mit der Eigenschaft, dass die paarweise adjazenten Knoten unterschiedliche Farben haben.

Behauptung 2
Für jeden Graph G mit n Knoten gilt es immer, dass $n \leq \alpha(G) \times \chi(G)$

Beweis. Wir verteilen die n Knoten von Graph G auf $\chi(G)$ Farbeklassen(Klassen von Knoten mit der gleichen Farbe). Mit dem Schubfachprinzip hat eine Farbeklasse mindestens $n/\chi(G)$ Knoten. Diese Knoten sind paarweise nicht adjazent. Daraus folgt $\alpha(G) \geq n/\chi(G)$, genau was wir wollen. $\square$

Definition 3
Ein Graph ist zusammenhängend (engl. connected), wenn für jedes Paar von Knoten u und v ein $(u-v)$-Pfad in G existiert.

Behauptung 3
Sei G ein Graph mit n Knoten. G ist zusammenhängend wenn jedes Knoten einen Grad von mindestens $(n-1)/2$ hat.

Beweis. Wir wählen beliebig 2 Knoten x und y aus. Seien x und y nicht adjazent. Die beiden Knoten x und y haben einen Grad von mindestens $(n-1)/2$. Deshalb gibt mindestens $n-1$ Kanten, die die Knoten x und y mit den übrigen Knoten verbinden. Die Anzahl der übrigen Knoten ist $n-2$. Das Schubfachprinzip impliziert dass ein Knoten davon adjazent zum nicht nur x sondern auch y ist. Wir haben bewiesen, dass jedes Paar von Knoten entweder adjazent ist oder einen gemeinsamen Nachbarn hat. Daraus folgt, dass G zusammenhängend ist. $\square$

3 Das Erdös-Szekeres Theorem

Sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge mit n verschiedenen Zahlen. Eine Teilfolge mit k Zahlen aus Folge A ist eine Folge B mit k verschiedenen Zahlen aus A, die in gleicher Reihenfolge genau so wie in Folge A erscheinen. In mathematischer Schreibweise, $B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, wobei $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Eine Teilfolge B ist steigend, wenn $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}$. B ist fallend, wenn $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_k}$.

Wir interessieren uns für die Länge der längstens steigenden und fallenden Teilfolge von A. Ein bekanntes Resultat von Erdös und Szekeres war eins der ersten Resultate in extremal combinatorics.

Satz 1
Sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge mit n verschiedenen realen Zahlen. Wenn $n \geq sr + 1$, dann entweder A eine steigende Teilfolge mit $s + 1$ Zahlen oder eine fallende Teilfolge mit $r + 1$ Zahlen besitzt (oder beides).

Beweis. (Seidenberg 1959) Wir ordnen jeder Zahl a_i aus Folge A ein Paar scores (x_i, y_i) ein. x_i ist die Länge der längsten steigenden Teilfolge mit der Endung a_i . yi ist die Länge der längsten fallenden Teilfoge mit dem Anfang a_i. Und $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ wenn $i \neq j$. Hier ist ein Gitter mit n^2 Fächer.

Wir setzen jede Zahl a_i in das Schubfach mit den Koordinaten (x_i, y_i) ein. Jede Zahl kann in ein Fach eingesetzt werden, weil $1 \leq x_i, y_i \leq n$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Kein Schubfach darf mehr als ein Zahl enthalten, weil $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ wenn $i \neq j$. Die Länge der Folge A ist gleich n und n ist grösser gleich $sr + 1$. Deshalb haben wir mehre Zahlen als die schraffierte Fächer in der Abbildung 2. Es gibt bestimmte Zahl a_i, die sich in dem nicht schraffierte Bereich befindet. D.h. entweder $x_i \geq s + 1$ oder $y_i \geq r + 1$ (oder beides), genau was wir wollen. $\square$

4 Turán's Theorem

Definition 4
Ein k-Klique ist ein Graph mit k Knoten, wobei je beliebige paar Knoten durch eine Kante verbinden sind. Z.B. Dreiecken sind 3-Klique.

Satz 2
(Paul Turán,1941): Falls ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten kein $(k + 1)$-Klique hat, wobei $k \geq 2$, dann $|E| \leq (1 - \frac{1}{k})\frac{n^2}{2}$.

Beweis. Mittels vollständiger Induktion für $n \in N$:

(1)Induktionsanfang: Es ist klar, dass die Aussage für $n = 1$ wahr ist.

(2)Induktionsschritt: Sei $n = i - 1$ die Aussage wahr. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit i Knoten, ohne $(k + 1)$-Klique und mit einer maximalen Anzahl von Kanten. Das Graph enthält sicher k-Klique, ansonst könnten wir Kanten dazu addieren. (Widerspruch zu der Aussage: mit einer maximalen Anzahl von Kanten).

Sei A diese k-Klique. Sei $B = V - A$, $|B| = i - k$

e_A ist die Anzahl der Kanten von A, $e_A = \binom{k}{2}$, weil je beliebige paar Knoten von A durch eine Kante verknüpft werden.

e_B ist die Anzahl der Kanten in B, per Induktion bekommen wir $e_B \leq (1 - \frac{1}{k})\frac{(n-k)^2}{2}$.

$e_{A,B}$ ist die Anzahl der Kanten zwischen A und B. G hat kein $(k+1)$-Klique. Jedes Knoten x aus B ist adjazent zur maximal $k-1$ Knoten in A (ansonst hätte G $(k+1)$-Klique). Daraus folgt, $e_{A,B} \leq (k-1)(n-k)$.

$$\begin{aligned} |E| &\leq e_A + e_B + e_{A,B} \\ &\leq \binom{k}{2} + \binom{k}{2}(\frac{n-k}{k})^2 + (k-1)(n-k) = \binom{k}{2} + \binom{k}{2}(\frac{n-k}{k})^2 + \binom{k}{2}\frac{2}{k}(n-k) \\ &= \binom{k}{2}(1 + \frac{n-k}{k})^2 = (1 - \frac{1}{k})\frac{n^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

□

5 Swell-colored Graphen

Definition 5

Ein vollständiger Graph K_n besteht aus n Knoten, die alle paarweise miteinander verbunden sind.

Jetzt färben wir die Kanten des vollständigen Graphen K_n mit n Knoten.

Definition 6

Ein Graph ist swell-colored wenn jedes Dreieck genau 1 oder 3 Farben hat (niemals 2 Farben) und wenn dieser Graph mehr als eine Farbe besitzt. D.h. fr jedes Dreieck, entweder alle drei Kanten die gleiche Farbe besitzt oder jede eine verschiedene Farbe besitzt. Zum Beispiel, K_3 und K_4 sind die einzigen swell-colored K_n mit 3 Farben. Alle anderen K_n benötigen mehre Farben.

Satz 3

(Ward-Szabó 1994) Der vollständige Graph mit n Knoten kann nicht swell-colored sein, mit weniger als $\sqrt{n} + 1$ Farben.

Beweis. Sei K_n swell-colored mit l verschiedenen Farben. Sei $N(x,c)$ die Anzahl der Kanten inzident zum Knoten x, welche die Farbe c haben. Wir machen x_0 und c_0 fest, wobei $N(x_0, c_0)$ maximal ist und mit N gekennzeichnet wird. Die $n-1$ Kante inzident zum Knoten x_0 können nach Farben in $\leq l$ Farbeklassen eingeordnet werden. Jede Farbeklasse besiztz N oder wenige Kanten. Mit dem Schubfachprinzip bekommen wir: $N \times l \geq n-1$.

Sei $x_1, \ldots, x_N$ die Knoten, die durch N Kanten zu x_0 adjazent sind. Natürlich haben diese Kanten die Farbe c_0. G ist der vollständige Teilgraph von K_n mit der Knotenmenge $\{x_0, x_1, ..., x_N\}$. G hat die swell-coldredness von K_n vererbt. Deshalb haben alle Kanten von G auch die Farbe c_0.

Da K_n mindestens 2 Farben hat, gibt es bestimmt einen Knoten y aus K_n, das nicht in Teilgraph G ist. Mindestens eine Kante, die das Knoten y mit dem Teilgraph G verbindet, hat eine andere Farbe als c_0 (die Eigenschaft des Knotens y).

Behauptung 4
Jede der $N+1$ Kanten, mit welche y und G verbunden sind, hat eine von anderen Kanten verschiedene Farben. Und diese Farben von der $N+1$ Kanten sind ganz anders als c_0.

Beweis. Diese Behauptung besagt dass $l \geq N+2$. Zusammen mit $N \times l \geq n-1$ liefert $l(l-2) \geq n-1$ aus. Damit ist $l \geq \sqrt{n}+1$, genau was wir wünschen. Es bleibt uns noch übrig zu beweisen die Behauptung.

Zur Erst beweisen wir die zweite Aussage: Die Farben von der $N+1$ Kanten sind ganz anders als c_0. Für alle $0 \leq i, j \leq N$ gilt, dass $\{x_i, x_j\}$ die Farbe c_0 hat. Wenn eine Kante $\{y, x_i\}$ auch die Farbe c_0 hat, dann hat $\{y, x_j\}$ auch die Farbe c_0. Widerspruch zu der Eigenschaft des Knotens y.

Jetzt beweisen wir die erste Aussage: Jede der $N+1$ Kanten hat eine von anderen Kanten verschiedene Farben. Sei beliebig 2 Kanten $\{y, x_i\}$, $\{y, x_j\}$, mit welche y und G verbunden sind, die gleiche Farbe haben. Wegen des swell-coloredness von K_n bekommen wir dass $\{x_i, x_j\}$ die gleich Farbe besitzt. Aber $\{x_i, x_j\}$ gehört zum Graph G und hat die Farbe c_0. Deshalb hat $\{y, x_i\}$ auch die Farbe c_0. Widerspruch zu der zweiten Aussage.

Damit haben wir die Behauptung bewiesen. □

□