Das Prinzip der Inklusion und Exklusion

Philipp Kranen

Extremal Combinatorics

Gliederung

- Einleitung
- Inklusion und Exklusion
- Bonferroni-Ungleichungen
- Erweiterungen
- Zusammenfassung

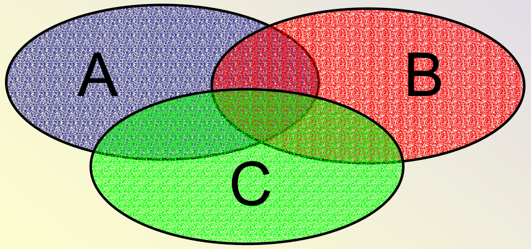
Einleitung (I)

- Prinzip der Inklusion und Exklusion
  - Siebformel
  - Das Sieb des Eratosthenes
- Verbindet die Kardinalität einer Vereinigung von Mengen mit der Kardinalität von Schnittmengen einiger dieser Mengen (letztere sind oft leichter zu Bestimmen)
- Bsp.: 2 Mengen A und B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Einleitung (II)

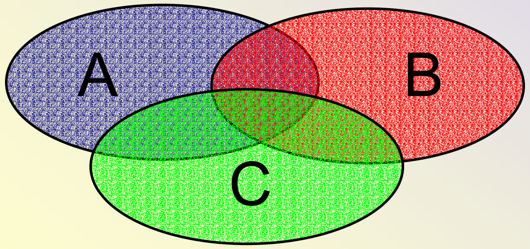
- Bsp.: 3 Mengen



$$|A \text{ U } B \text{ U } C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$$
$$- |A \cap B| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

Einleitung (II)

- Bsp.: 3 Mengen



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$$
$$- |A \cap B| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

- Allgemein: Siebformel

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|}$$

Einleitung (III)

- Name „Inklusion und Exklusion“
  - Überschätzen, falls k ungerade
  - Unterschätzen, falls k gerade
- Bonferroni-Ungleichungen
  - Zunächst entdeckt von Ch. Jordan
  - Später auch von Bonferroni
  - Heute: Diverse Erweiterungen und Verbesserungen der Ungleichungen

Übersicht

- Einleitung
- Inklusion und Exklusion
  - Das Prinzip
  - Anwendungen
- Bonferroni-Ungleichungen
- Erweiterungen
- Zusammenfassung

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (I)

- Schreibweise

$$I \subseteq \{1,\ldots,n\} \ : \ A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \ , \ A_\emptyset = X$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (I)

- Schreibweise

$$I \subseteq \{1,\ldots,n\} \;:\; A_I = \bigcap_{i\in I} A_i \;,\; A_\emptyset = X$$

- Satz 1:

Seien $A_1,\ldots,A_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \, |A_I|$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (II)

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

- Beweis

$$\sum_I (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_I \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_x \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|}$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (II)

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

- Beweis

$$\sum_I (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_I \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_x \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|}$$

$$(1)\quad x \notin A_i, i = 1 \ldots n \Rightarrow x \in A_\emptyset \Rightarrow \sum \sum (-1)^{|I|} = 1$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (II)

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \, |A_I|$$

- Beweis

$$\sum_{I} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{I} \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_{x} \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|}$$

$$(1)\ \ x \notin A_i, i = 1 \ldots n \Rightarrow x \in A_\emptyset \Rightarrow \sum \ \sum \ (-1)^{|I|} = 1$$

$$(2)\ \ \{1, \ldots, n\} \supseteq J = \{i : x \in A_i\} \neq \emptyset \; und \; x \in A_I \Leftrightarrow I \subseteq J$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (II)

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

- Beweis

$$\sum_I (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_I \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_x \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|}$$

$$(1)\quad x \notin A_i, i = 1 \ldots n \Rightarrow x \in A_\emptyset \Rightarrow \sum \sum (-1)^{|I|} = 1$$

$$(2)\quad \{1, \ldots, n\} \supseteq J = \{i : x \in A_i\} \neq \emptyset \; und \; x \in A_I \Leftrightarrow I \subseteq J$$

$$\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^{|J|} \binom{|J|}{i} (-1)^i = (1-1)^{|J|} = 0$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (III)

- Satz 2: Seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |A_I|$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (III)

- Satz 2:

Seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |A_I|$$

- Beweis

Linke Seite entspricht $\left| X \setminus (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \right|$.

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (III)

- **Satz 2:** Seien $A_1,\ldots,A_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1}\,|A_I|$$

- **Beweis**

Linke Seite entspricht $\left|X \setminus (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i)\right|$.

Mit $X = A_\emptyset$ und Satz 1 folgt

$$|A_\emptyset| - \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}\,|A_I| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1}\,|A_I|$$

Inklusion und Exklusion: Das Prinzip (IV)

- Resultat

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \left| A_I \right|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left| A_I \right|$$

- Alternative Schreibweise

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right|$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (I)

- Wieviele Zahlen ≤ 1000 sind durch 3, 5 oder 7 teilbar?

  Lösung (Satz 2):

$$|A_k| = \lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (I)

- Wieviele Zahlen < 1000 sind durch 3, 5 oder 7 teilbar?

  Lösung (Satz 2):

$$|A_k| = \lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$$

$$\left| A_i \bigcap A_j \right| = \left| A_{kgV(i,j)} \right|$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (I)

- Wieviele Zahlen < 1000 sind durch 3, 5 oder 7 teilbar?

  Lösung (Satz 2):

$$|A_k| = \lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$$

$$\left| A_i \bigcap A_j \right| = \left| A_{kgV(i,j)} \right|$$

$$333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (II)

- Wieviele Elemente gehören zu allen Ai aber zu keinem Anderen? (Spezialfall: Satz 1)

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (II)

- Wieviele Elemente gehören zu allen Ai , i є I aber zu keinem Anderen? (Spezialfall: Satz 1)

Gegeben $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Sei $Y = \bigcap_{i \in I} A_i$ und $B_k = Y \bigcap A_k$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$.

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (II)

- Wieviele Elemente gehören zu allen Ai , i є I aber zu keinem Anderen? (Spezialfall: Satz 1)

Gegeben $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Sei $Y = \bigcap_{i \in I} A_i$ und $B_k = Y \bigcap A_k$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$.

Gesucht ist $\left| Y \setminus \bigcup_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} B_k \right|$.

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (II)

- Wieviele Elemente gehören zu allen Ai , i є I aber zu keinem Anderen? (Spezialfall: Satz 1)

Gegeben $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Sei $Y = \bigcap_{i \in I} A_i$ und $B_k = Y \bigcap A_k$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$.

Gesucht ist $\left| Y \setminus \bigcup_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} B_k \right|$. Nach Satz 1 ist dies

$$\sum_{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{k \in K} B_k \right| = \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{i \in K \bigcup I} A_i \right|$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (II)

- Wieviele Elemente gehören zu allen Ai , i є I aber zu keinem Anderen? (Spezialfall: Satz 1)

Gegeben $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Sei $Y = \bigcap_{i \in I} A_i$ und $B_k = Y \bigcap A_k$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$.

Gesucht ist $\left| Y \setminus \bigcup_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} B_k \right|$. Nach Satz 1 ist dies

$$\begin{aligned} \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{k \in K} B_k \right| &= \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{i \in K \bigcup I} A_i \right| \\ &= \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} |A_J| \end{aligned}$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (III)

- Derangement-Zahlen
  - Derangement = Permutation ohne Fixpunkt
  - Wie groß ist die Anzahl der Derangements?

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (III)

- Derangement-Zahlen
  - Derangement = Permutation ohne Fixpunkt
  - Wie groß ist die Anzahl der Derangements?

$X \hat{=}$ Alle Permutationen, $A_i \hat{=}$ Alle Permutationen mit Fixpunkt i.

$|X| = n!\ ,\ |A_i| = (n-1)!\ ,\ |A_I| = (n-|I|)!$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (III)

- Derangement-Zahlen
  - Derangement = Permutation ohne Fixpunkt
  - Wie groß ist die Anzahl der Derangements?

$X \hat{=}$ Alle Permutationen, $A_i \hat{=}$ Alle Permutationen mit Fixpunkt i.

$|X| = n!\ ,\ |A_i| = (n-1)!\ ,\ |A_I| = (n-|I|)!$

Gesucht sind alle $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. (Satz 1)

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}(n-|I|)! \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! \quad , mit\ i = |I|$$

Inklusion und Exklusion: Anwendungen (III)

- Derangement-Zahlen
  - Derangement = Permutation ohne Fixpunkt
  - Wie groß ist die Anzahl der Derangements?

$X \hat{=}$ Alle Permutationen, $A_i \hat{=}$ Alle Permutationen mit Fixpunkt i.

$|X| = n!$, $|A_i| = (n-1)!$, $|A_I| = (n-|I|)!$

Gesucht sind alle $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. (Satz 1)

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}(n-|I|)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! \quad , mit\ i = |I|$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Übersicht

- Einleitung
- Inklusion und Exklusion
- Bonferroni-Ungleichungen
- Erweiterungen
- Zusammenfassung

Bonferroni-Ungleichungen (I)

- Die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \sum_{|I|=i} |A_I| \leq \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \quad falls\, k\, gerade$$

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \sum_{|I|=i} |A_I| \geq \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \quad falls\, k\, ungerade$$

Bonferroni-Ungleichungen (II)

- Beweis

$$a \in X \ : \ |\{A_i | a \in A_i\}| = l$$

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{l}{i} \begin{cases} \leq 1 \ , \ k \ gerade \\ \geq 1 \ , \ k \ ungerade \end{cases}$$

Bonferroni-Ungleichungen (II)

- **Beweis**

$$a \in X \;:\; |\{A_i | a \in A_i\}| = l$$

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{l}{i} \begin{cases} \leq 1\,, & k \; gerade \\ \geq 1\,, & k \; ungerade \end{cases}$$

$$(1) \quad k > l \;:\; \surd\,,\; da \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{l}{i} = 1$$

Bonferroni-Ungleichungen (II)

- Beweis

$$a \in X \ : \ |\{A_i | a \in A_i\}| = l$$

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{l}{i} \begin{cases} \leq 1 \ , \ k \, gerade \\ \geq 1 \ , \ k \, ungerade \end{cases}$$

$$(1) \quad k > l \ : \ \surd \ , \ da \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{l}{i} = 1$$

$$(2) \quad k \leq \frac{l+1}{2} \ : \ \surd \ , \ da \ aus \ r \leq \frac{l-1}{2} \ folgt \binom{l}{r} \leq \binom{l}{r+1}$$

Bonferroni-Ungleichungen (II)

- **Beweis**

$$a \in X \,:\, |\{A_i | a \in A_i\}| = l$$

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{l}{i} \begin{cases} \leq 1 \,,\; k\, gerade \\ \geq 1 \,,\; k\, ungerade \end{cases}$$

$$(1) \quad k > l \,:\, \surd \,,\, da \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{l}{i} = 1$$

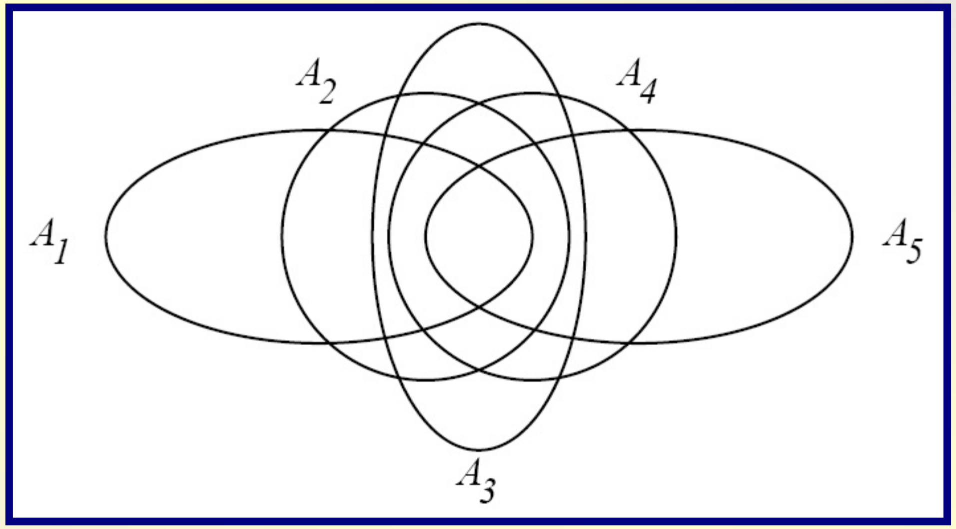
$$(2) \quad k \leq \frac{l+1}{2} \,:\, \surd \,,\, da\, aus\, r \leq \frac{l-1}{2}\, folgt \binom{l}{r} \leq \binom{l}{r+1}$$

$$(3) \quad k > \frac{l+1}{2} \,:\, \surd \,,\, da \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{l}{i} = 1 - \sum_{i=k+1}^{l} (-1)^{i-1} \binom{l}{i}$$

Übersicht

- Einleitung
- Inklusion und Exklusion
- Bonferroni Ungleichungen
- Erweiterungen
  - Inklusion und Exklusion
  - Bonferroni-Ungleichungen
  - Anwendungen
- Zusammenfassung

Erweiterungen: Inklusion und Exklusion (I)



- 5 Mengen $\rightarrow 2^5 - 1 = 31$ Schnittmengen
- $|\bigcup A_i| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|$
  $- |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| - |A_4 \cap A_5|$
- 9 statt 31 Terme

Erweiterungen: Inklusion und Exklusion (II)

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq N} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

Erweiterungen: Inklusion und Exklusion (II)

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq N} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

$$\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq N} (-1)^{|I|-1}\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

- Verwendung von „Messfunktionen“

Erweiterungen: Bonferroni-Ungleichungen (I)

Nach Galambos

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \leq \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\leq r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \frac{r+1}{|N|}\sum_{\substack{I\subseteq N\\ |I|=r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \quad, r \textit{ ungerade}$$

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \geq \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\leq r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \frac{r+1}{|N|}\sum_{\substack{I\subseteq N\\ |I|=r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \quad, r \textit{ gerade}$$

Erweiterungen: Bonferroni-Ungleichungen (I)

Nach Galambos

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \le \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\le r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \frac{r+1}{|N|}\sum_{\substack{I\subseteq N\\ |I|=r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \quad , r\ ungerade$$

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \ge \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\le r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \frac{r+1}{|N|}\sum_{\substack{I\subseteq N\\ |I|=r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \quad , r\ gerade$$

Nach Tomescu

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \le \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\le r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \sum_{I\in \varepsilon_{r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \quad , r\ ungerade$$

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \ge \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\le r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \sum_{I\in \varepsilon_{r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \quad , r\ gerade$$

, wobei ε_{r+1} die Kantenmenge eines sog. (r + 1)-hypertree ist.

Erweiterungen: Anwendungen (I)

$$\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq N} (-1)^{|I|-1}\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

- μ beispielsweise ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
  - Wahrscheinlichkeitstheorie
  - Verläßlichkeitsanalyse

Übersicht

- Einleitung
- Inklusion und Exklusion
- Bonferroni Ungleichungen
- Erweiterungen
- Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Berechnung der Kardinalität m.H.v. Kardinalitäten von Schnittmengen
- Näherung mit Hilfe der Bonferroni-Ungleichungen
  - Exakter durch erweiterte Gleichungen
- Einsatz von „Messfunktionen"
  - Bsp.: Wahrscheinlichkeiten

Fragen

?

Weitere Anwendungsbeispiele

- Platziere 3 Paare um einen runden Tisch. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass
  - keiner neben seinem Partner sitzt?
  - sich keine zwei Frauen gegenüber sitzen?

  - Insgesamt gibt es 5! Möglichkeiten, die 6 Personen um den Tisch zu platzieren.

…

Weitere Anwendungsbeispiele

… keiner neben seinem Partner sitzt?

$A_i \mathrel{\hat{=}}$ i-tes Paar sitzt nebeneinander.

$$|A_i| = 2 \cdot 4!$$
$$|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot 3!$$
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^3 \cdot 2!$$

…

Weitere Anwendungsbeispiele

… keiner neben seinem Partner sitzt?

$A_i \mathrel{\hat{=}}$ i-tes Paar sitzt nebeneinander.

$$|A_i| = 2 \cdot 4!$$
$$|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot 3!$$
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^3 \cdot 2!$$

Nach Satz 1 folgt

$$5! - 2 \cdot 4! \cdot 3 + 2^2 \cdot 3! \cdot 3 - 2^3 \cdot 2! = 32$$

…

Weitere Anwendungsbeispiele

… sich keine zwei Frauen gegenüber sitzen?

$A_{ja} \hat{=}$ zwei Frauen sitzen nebeneinander.

$A_{nein} \hat{=}$ keine zwei Frauen nebeneinander.

…

Weitere Anwendungsbeispiele

… sich keine zwei Frauen gegenüber sitzen?

$A_{ja} \hat{=}$ zwei Frauen sitzen nebeneinander.

$A_{nein} \hat{=}$ keine zwei Frauen nebeneinander.

$$\left|A_{ja}\right| = 3! \cdot 3! = 36$$

-
-
-
-
-
- …

Weitere Anwendungsbeispiele

… sich keine zwei Frauen gegenüber sitzen?

$A_{ja} \mathrel{\hat{=}}$ zwei Frauen sitzen nebeneinander.

$A_{nein} \mathrel{\hat{=}}$ keine zwei Frauen nebeneinander.

$$\left|A_{ja}\right| = 3! \cdot 3! = 36$$
$$\left|A_{nein}\right| = 2 \cdot 3! = 12$$

…

Weitere Anwendungsbeispiele

… sich keine zwei Frauen gegenüber sitzen?

$A_{ja} \mathrel{\hat{=}}$ zwei Frauen sitzen nebeneinander.

$A_{nein} \mathrel{\hat{=}}$ keine zwei Frauen nebeneinander.

$$\left|A_{ja}\right| = 3! \cdot 3! = 36$$
$$\left|A_{nein}\right| = 2 \cdot 3! = 12$$
$$\left|A_{ja} \cap A_{nein}\right| = 0$$

…

Weitere Anwendungsbeispiele

… sich keine zwei Frauen gegenüber sitzen?

$A_{ja} \mathrel{\hat{=}}$ zwei Frauen sitzen nebeneinander.

$A_{nein} \mathrel{\hat{=}}$ keine zwei Frauen nebeneinander.

$$\left|A_{ja}\right| = 3! \cdot 3! = 36$$
$$\left|A_{nein}\right| = 2 \cdot 3! = 12$$
$$\left|A_{ja} \cap A_{nein}\right| = 0$$
$$5! - 36 - 12 + 0 = 72$$

…

Ende

Danke

Weitere Anwendungsbeispiele (II)

- Graphfärbung mit r Farben

Weitere Anwendungsbeispiele (III)

- A sei nxn Matrix mit $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ und $A_{ii} = 0$. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

…