Extremal Combinatorics
Seminar Sommersemester 2004

Das Prinzip der Inklusion und Exklusion

Seminararbeit im Studiengang Informatik von

Philipp Kranen
Matr. Nr. 227 520

Lehr- und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Prof. Dr. P. Rossmanith
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

14. Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, welches man in der Literatur auch unter dem Namen *Siebformel* oder *Das Sieb des Eratosthenes* findet, stellt eine Methode dar, mit der sich die Kardinalität der Vereinigung von Mengen durch Kardinalitäten von Schnittmengen einiger dieser Mengen berechnen lässt. Seien also Mengen $A_i,\ i = 1 \ldots n$ gegeben und gesucht ist die Anzahl der Elemente in der Vereinigung der Mengen A_1 bis A_n. Mit dem Prinzip der Inklusion und Exklusion lässt sich nun diese Anzahl allein mit Hilfe der Größe von Schnittmengen einiger der A_i bestimmen, was den Vorteil hat, dass diese häufig einfacher zu bestimmen sind. Dabei ist nicht der triviale Fall von Interesse, in dem die Mengen A_i paarweise disjunkt sind, da dort die Kardinalität der Vereinigung gleich der Aufsummierung der einzelnen Kardinalitäten ist. Sind die Mengen jedoch nicht disjunkt, so führte die Aufsummierung der Kardinalitäten der A_i zu einem zu großen Ergebniss, da Elemente, die im Schnitt zweier oder mehrerer Mengen liegen, mehrfach gezählt würden.

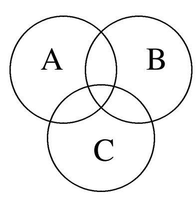
Möchte man die Größe der Vereinigung von zwei Mengen berechnen, sieht das Ergebniss wie folgt aus: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, d.h. man addiert die Größen der beiden einzelnen Mengen und subtrahiert anschließend die Größe des Schnitts der beiden Mengen, da man alle Elemente die im Schnitt liegen zuvor doppelt gezählt hat. Dabei sind auch $|A|$ und $|B|$ Schnittmengen und zwar der einfachste Schnitt der Menge A bzw. B mit sich selbst und keiner weiteren Menge. Die Größe der Vereinigung dreier Mengen ergibt sich zu:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Zunächst addiert man die Größen der einzelnen Mengen, subtrahiert die Größen der Schnitte je zweier Mengen, da diese Elemente doppelt gezählt wurden, und addiert wiederum die Größe der Schnittmenge aller drei Mengen, da die Elemente dieser Schnittmenge erst dreifach addiert und anschließend wieder dreifach subtrahiert wurden (vgl. Abbildung). Allgemein benutzt man zur Berechnung der Kardinalität von Vereinigungen die Siebformel:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

Die Siebformel ist die alternierende Summe über der Summe der Kardinalitäten aller möglichen Schnittmengen der Größe k. Den Beweis zur Siebformel bzw. dem Prinzip der Inklusion und Exklusion liefert Kapitel 2.1.



Das Prinzip der Inklusion und Exklusion hat seinen Namen von der Tatsache, dass das korrekte Ergebniss überschätzt wird, falls man die erste Summe der Gleichung bei ungeradem k abbrechen läßt, und unterschätzt wird, falls die Summe bei geradem k abgebrochen wird. Beispielsweise gilt für k = 1, dass lediglich die Kardinalitäten der einzelnen Mengen addiert werden, was im nicht trivialen Fall zu einem zu großen Ergebniss führt, für k = 2 hingegen werden danach die Größen der Schnitte je zweier Mengen subtrahiert, wodurch das Ergebniss kleiner oder gleich der korrekten Lösung ist. Dadurch läßt sich eine Näherung an das tatsächliche Ergebniss errechnen und man weiss zudem, dass das Ergebnis für gerade k unterschätzt und für ungerade k überschätzt wurde. Diese Tatsache trägt in der Mathematik den Namen Bonferroni-Ungleichungen. Die Ungleichungen wurden zunächst von Ch. Jordan entdeckt und später auch von Bonferroni, sind jedoch heute unter dem Namen Bonferroni-Ungleichungen bekannt. Wie bereits erwähnt werden die Ungleichungen in Kapitel 3 näher erläutert und auch bewiesen. Heute gibt es einige Erweiterungen und Verbesserungen der Bonferroni-Ungleichungen mit denen sich eine exaktere Näherung berechnen lässt (siehe Kapitel 4.2).

Im folgenden Kapitel werden zunächst zwei Sätze zum Prinzip der Inklusion und Exklusion und deren Beweise vorgestellt, anschließend werden in Kapitel 2.2 einige Anwendungsbeispiele angeführt. Kapitel 3 behandelt die Bonferroni-Ungleichungen, welche dort ebenfalls bewiesen werden. Im Abschnitt Erweiterungen werden Anmerkungen sowie Verbesserungen vorgestellt, die über die klassischen Inklusion und Exklusion Gleichungen, bzw. die Bonferroni-Ungleichungen hinausgehen, Kapitel 5 fasst abschließend die Ergebnisse zusammen und nennt weiterführende Literatur.

2 Inklusion und Exklusion

2.1 Das Prinzip

Im Weiteren Verlauf wird die folgende vereinfachende Schreibweise für den Schnitt der Mengen A_i verwandt, wobei i aus einer Teilmenge I der Zahlen von 1 bis n ist:

Definition 2.1: Sei $I \subseteq \{1,\dots,n\}$. Dann ist $A_I := \bigcap_{i\in I} A_i$ und folglich $A_\emptyset = X$.

Die gegebenen Mengen A_i sind alle Teilmengen eines Universums X. Zunächst interessiert die Anzahl der Elemente aus dem Universum X, die in keiner der Teilmengen A_i enthalten sind. Diese Anzahl lässt sich mit Hilfe des folgenden Satzes berechnen.

Satz 2.2: Seien $A_1,\dots,A_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I| .$$

Beweis: Zunächst wird die Summe wie folgt umgeschrieben:

$$\sum_I (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_I \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_x \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|}$$

, d.h. für jedes Element x des Universums wird sein Beitrag zur Summe berechnet. Dazu werden zwei Fälle unterschieden:

1. x ist keiner der Mengen A_i enthalten, daraus folgt, dass x nur in der Menge $A_\emptyset$ enthalten ist. Somit ist der einzige vorkommende Term $(-1)^{|\emptyset|} = (-1)^0 = 1$ und der Beitrag von x zur Summe ist 1.

2. Es Existiert eine nichtleere Teilmenge $J = \{i : x \in A_i\}$ der Zahlen 1 bis n und folglich gilt $x \in A_I \Leftrightarrow I \subseteq J$. Nun lässt sich die zweite Summe nochmals umschreiben zu

$$\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^{|J|} \binom{|J|}{i} (-1)^i = (1-1)^{|J|} = 0.$$

Somit trägt jedes x, welches in einer oder mehreren der Mengen A_i enthalten ist 0 zur Summe bei.

□

Satz 2.3 gibt uns nun die Berechnungsvorschrift um die Kardinalität der Vereinigung von Mengen zu bestimmen.

Satz 2.3: Seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |A_I| .$$

Beweis: Die linke Seite der Gleichung entspricht $|X \setminus (X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i)|$. Mit $X = A_\emptyset$ und Satz 1 folgt

$$|A_\emptyset| - \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |A_I|$$

, indem man den Summand für $I = \emptyset$ aus der Summe herauszieht und das negative Vorzeichen in die Summe reinmultipliziert.

□

Der Beweis zu Satz 2.3 läßt sich auch per Induktion über die Anzahl der Mengen durchführen.

Mit den beiden vorangegangenen Sätzen haben wir nun Werkzeuge um die Kardinalität von Vereinigungen bzw. die Anzahl aller Elemente außerhalb einer Vereinigung zu berechnen, im folgenden Abschnitt werden nun einige Anwendungsbeispiele gegeben.

2.2 Anwendungsbeispiele

Das erste Anwendungsbeispiel ist ein sehr einfaches und ist sicherlich dem ein oder anderen Leser bekannt. Die Frage lautet, wieviele Zahlen kleiner oder gleich 1000 durch die Zahlen drei, fünf oder sieben teilbar sind. Dazu werden die Mengen A_k definiert, welche alle diejenigen Zahlen kleiner oder gleich 1000 enthalten, die durck k teilbar sind. Damit ergibt sich die Größe der Mengen zu:

$$\begin{aligned} |A_k| &= \lfloor \frac{1000}{k} \rfloor , \\ \left| A_i \bigcap A_j \right| &= \left| A_{kgV(i,j)} \right| . \end{aligned}$$

Beispielsweise ist jede dritte Zahl durch drei teilbar, somit gilt $|A_3| = \lfloor 1000/3 \rfloor = 333$. Zahlen, die sowohl durch i als auch durch j teilbar sind, sind auch durch deren kleinstes gemeinsames Vielfaches teilbar, zum Beispiel ist die Anzahl der durch drei und fünf teilbaren Zahlen $|A_{kgV(3,5)}| = |A_{15}| = 66$. Die Antwort auf die Frage ergibt sich mit Satz 2.3 zu $333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$.

Die folgende Anwendung verallgemeinert sozusagen Satz 2.2. Gegeben seien n Teilmengen des Universums X und eine Teilmenge I der Zahlen von 1 bis n. Gesucht ist die Anzahl der Elemente, die zu allen A_i, $i \in I$, gehören, aber zu keiner der übrigen Teilmengen. In Satz 2.2 galt $I = \emptyset$, d.h. gesucht waren alle Elemente, die zu keiner der Mengen A_i gehören. Zur Lösung der Aufgabe werden folgende Mengen definiert (gegeben $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$):

Sei $Y = \bigcap_{i \in I} A_i$ und $B_k = Y \bigcap A_k$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$.

Gesucht ist dann $\left| Y \setminus \bigcup_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} B_k \right|$. Nach Satz 1 ist dies

$$\begin{aligned} \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{k \in K} B_k \right| &= \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{i \in K \bigcup I} A_i \right| \\ &= \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} |A_J| . \end{aligned}$$

Im ersten Umformungsschitt wird die Definition der Mengen B_k verwandt, um den Schnitt über alle A_i laufen zu lassen, wobei i nun aus der Vereinigung von K und I ist. Der zweite Umformungsschritt nutzt nun, dass die Vereinigung von K und I eine Obermenge J von I ist und sich die Größe der Menge K als die Größe der Menge $J \setminus I$ ausdrücken läßt. Schließlich wird im zweiten Schritt noch die in Definition 2.1 eingeführte vereinfachende Schreibweise eingesetzt. Im Spezialfall $I = \emptyset$ von Satz 2.2 wird über alle Teilmengen der Zahlen von 1 bis n summiert und der Exponent von -1 ergibt sich zu der Größe der jeweiligen Teilmenge.

Die dritte Anwendung behandelt die sogenannten Derangementzahlen, genauer gesagt interessiert hier die Anzahl der Derangements. Ein Derangement ist eine Permutation ohne Fixpunkt, also eine bijektive Abbildung einer Menge in sich selbst, bei der kein Element auf sich selber abgebildet wird. Zur Lösung wird X als die Menge aller Permutationen definiert und die Mengen A_i als die Mengen aller Permutationen mit Fixpunkt i. Dann gilt $|X| = n!$, $|A_i| = (n-1)!$, und allgemein $|A_I| = (n-|I|)!$. Gesucht sind nun alle $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Mit Satz 2.2 ergibt sich die Anzahl zu

$$\begin{aligned}\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}(n-|I|)! &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! \quad ,mit\ i = |I| \\ &= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\end{aligned}$$

Der Ergebnisterm (ohne n!) entspricht dem ersten Term der Taylor-Entwicklung von e^{-1}, d.h. ungefähr $e^{-1} * 100\% = 38\%$ aller Permutationen sind Derangements. Beliebte Aufgabenbeispiele zu Derangementzahlen sind betrunkene Seemänner oder Hüte, wobei nach der Anzahl der Möglichkeiten gefragt ist, dass sich n Seemänner nach ihrem Landgang je in die nächstbeste Koje legen und dabei keiner in seiner eigenen Koje liegt, bzw. dass n Leute einen Hut aus einem Stapel nehmen und nachher keiner seinen eigenen Hut auf dem Kopf hat.

3 Bonferroni-Ungleichungen

In diesem Kapitel werden die Bonferroni-Ungleichungen bewiesen, mit denen sich das exakte Ergebniss der Inklusion und Exklusion nähern lässt. Folgende Form der Bonferroni-Ungleichungen wird verwandt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{|I|=i} |A_I| &\le \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\ &\quad falls\ k\ gerade \\ \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{|I|=i} |A_I| &\ge \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\ &\quad falls\ k\ ungerade\end{aligned}$$

Beweis: Betrachtet man ein beliebiges Element a aus dem Universum, welches in l der n Mengen enthalten ist, also $a \in X \ : \ |\{A_i | a \in A_i\}| = l$, dann ist folgendes zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \binom{l}{i} \begin{cases} \le 1\ , & k\ gerade \\ \ge 1\ , & k\ ungerade \end{cases}$$

, da es $\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}$ Möglichkeiten gibt eine i-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Menge zu wählen. Man zeigt damit, dass bei geradem k jedes Element höchstens einmal, bei ungeradem k mindestens einmal gezählt wird. Dazu werden drei Fälle unterschieden:

1. $k > l$. Der einfachste Fall, da dann gilt $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix} = 1$.

2. $k \leq \frac{l+1}{2}$. Da aus $r \leq \frac{l-1}{2}$ folgt, dass $\begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} l \\ r+1 \end{pmatrix}$ gilt, gilt bei geradem k und somit gerader Anzahl Summanden, dass je zwei aufeinander folgende Summanden zusammen negativ sind und somit die Summe ebenfalls negativ ist. Bei ungeradem k und somit ungerader Anzahl Summanden ist der erste Summand positiv und je 2 darauf folgende Summanden zusammen positiv, womit die Summe insgesamt positiv ist.

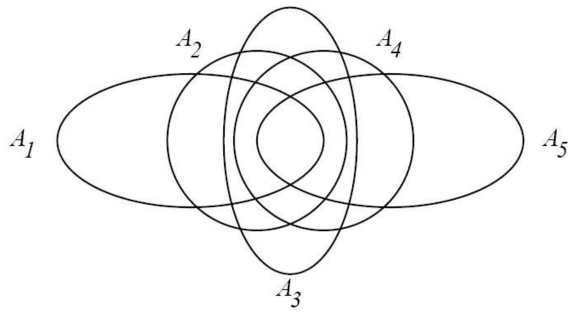
3. $k > \frac{l+1}{2}$. Nach der binomischen Formel lässt sich die Summe umschreiben zu $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix} = 1 - \sum_{i=k+1}^{l}(-1)^{i-1}\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}$ und aus $r > \frac{l+1}{2}$ folgt analog zu Punkt 2, dass $\begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} l \\ r+1 \end{pmatrix}$ gilt. Nun wird zwischen geraden und ungeraden k unterschieden:

   - Ist k gerade, so ist der erste Summand positiv, somit sind je zwei aufeinander folgende Summanden zusammen positiv und bei einer ungeraden Anzahl Summanden (l gerade) ist der letzte verbleibende Summand ebenfalls positiv aufgrund der alternierenden Summe. Damit gilt, dass die Summe größer oder gleich Null ist und somit Eins minus der Summe kleiner oder gleich Eins.
   - Bei ungeradem k ist der erste Summand negativ, somit sind zwei aufeinander folgende Summanden zusammen negativ und bei einer ungeraden Anzahl Summanden (l ungerade) ist der letzte verbleibende Summand ebenfalls negativ aufgrund der alternierenden Summe. Damit gilt, dass die Summe kleiner oder gleich Null ist und somit Eins minus der Summe größer oder gleich Eins.

$\square$

4 Erweiterungen

Im Folgenden werden zunächst zwei erweiternde Anmerkungen zum Prinzip der Inklusion und Exklusion angeführt und anschließend zwei verbesserte Varianten der Bonferroni-Ungleichungen aufgezeigt.



4.1 Anmerkungen zur Inklusion und Exklusion

Die erste Anmerkung bezieht sich auf die Anzahl der Terme in der Formel der Inklusion und Exklusion. Zur Berechnung der Kardinalität der Vereinigung von 5 Mengen sind bereits $2^5 - 1 = 31$ Terme notwendig. Bei den oben abgebildeten 5 Mengen genügen jedoch bereits die folgenden 9 Terme:

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = |A_1| \quad &+ \quad |A_2| \ + \ |A_3| \ + \ |A_4| \ + \ |A_5| \\ &- \quad |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| - |A_4 \cap A_5|. \end{aligned}$$

Diese Verbesserung von 31 auf 9 Terme zeigt ein großes Verbesserungspotential auf, falls man Wissen über Symetrie der zu vereinigenden Mengen hat. Dies ist aber auch zugleich der kritische Punkt, da ohne eine gegebene Symetrie keine Aussage über eventuell überflüssige Terme getroffen werden kann und somit diese Verbesserung nicht verallgemeinert werden kann.

Für die zweite Anmerkung wird zunächst eine weitere alternative Schreibweise vorgestellt. Dabei gibt die Funktion χ lediglich die Kardinalität der als Argument übergebenen Menge zurück.

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

Nun lässt sich statt der Funktion χ jede beliebige andere Maßfunktion μ in die Gleichung einsetzen, d.h. μ muss σ-additiv sein und es muss $\mu(x) \geq 0$, $\forall x$ gelten. Damit erhält man folgende Gleichung:

$$\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} \mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

Obige Gleichung kann beispielsweise zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten oder Verlässlichkeiten eingesetzt werden. Auch in den Bonferroni-Ungleichungen lassen sich beliebige Maßfunktionen einsetzen.

4.2 Verbesserte Bonferroni-Ungleichungen

Die folgenden Erweiterungen der Bonferroni-Ungleichungen werden ohne Beweis angeführt. Zunächst eine Erweiterung nach Galambos

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \;\leq\; \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\leq r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \frac{r+1}{|N|}\sum_{\substack{I\subseteq N\\ |I|=r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{, } r \text{ ungerade}$$

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \;\geq\; \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\leq r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \frac{r+1}{|N|}\sum_{\substack{I\subseteq N\\ |I|=r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{, } r \text{ gerade}$$

, welche aussagt, dass das Ergebnis für ungerade r weiterhin größer als das exakte Ergebnis ist, falls man zusätzlich den r+1-ten Term der Inklusion-Exklusion-Formel mit dem Vorfaktor $\frac{r+1}{|N|}$ subtrahiert, wobei $|N| = n$; analog für gerade r. Somit lässt sich eine exaktere Näherung erreichen als mit den klassischen Bonferroni-Ungleichungen.

Eine ebenfalls exaktere Näherung lässt sich mit den verbesserten Bonferroni-Ungleichungen nach Tomescu erzielen:

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \;\leq\; \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\leq r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \sum_{I\in\varepsilon_{r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{, } r \text{ ungerade}$$

$$\chi\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \;\geq\; \sum_{\substack{I\subseteq N\\ 0<|I|\leq r}} (-1)^{|I|-1}\chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \sum_{I\in\varepsilon_{r+1}} \chi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{, } r \text{ gerade}$$

, wobei ε_{r+1} die Kantenmenge eines sogenannten. (r + 1)-hypertree ist. Auch in den hier genannten Erweiterungen lässt sich χ durch eine beliebige Maßfunktion ersetzen.

5 Zusammenfassung

Das Prinzip der Inklusion und Exklusion ermöglicht die Berechnung der Kardinalität einer Vereinigung allein mit Hilfe von Kardinalitäten von Schnittmengen. Die Bonferroni-Ungleichungen stellen ein Werkzeug zur Näherung dieses Ergebnisses dar, exaktere Näherungen lassen sich mit verbesserten Bonferroni-Ungleichungen wie in Kapitel 4.2 vorgestellt erzielen. Der Einsatz von Maßfunktionen ermöglicht den Einsatz der vorgestellten Gleichungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie in der Berechnung von Verlässlichkeiten, des Weiteren wird das Prinzip der Inklusion und Exklusion in der Kombinatorik, in der Zahlentheorie und im Bereich der Statistik eingesetzt.

Weiterführende Literatur zur Kombinatorik sind [JUKNA 2001] und [STEGER 2001], vertiefende Ausführungen zur Inklusion und Exklusion sowie zu den Bonferroni-Ungleichungen und deren Erweiterungen sind beispielsweise in [DOHMEN 2000] zu finden.

Literatur

[DOHMEN 2000] DOHMEN, K (2000). *Improved Inclusion-Exclusion Identities and Bonferroni Inequalities with Applications to Reliability Analysis of Coherent Systems*. Habilitationsschrift, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultaet II der Humboldt-Universitaet zu Berlin.

[JUKNA 2001] JUKNA, S (2001). *Extremal Combinatorics. With Applications in Computer Science*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN-3540663134.

[STEGER 2001] STEGER, A (2001). *Diskrete Strukturen, Band 1, Kombinatorik - Graphentheorie - Algebra*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, ISBN-3540675973.