Die Methode des zweiten Moments

The second moment method

Christoph Schmidt

Seminar: Extremal combinatorics

July 16, 2004

Übersicht

- Einleitung
- Chebyshev Ungleichung
- Mathematische Grundlagen
- Anwendung I: Mengenseparatoren
- (Anwendung II: Schwellwertfunktion einer 4-Clique)

Einleitung

Varianz : mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert

Einleitung

Varianz : mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert

$$Var[X] = E[(X - EX)^2] = \underbrace{E[X^2]}_{2.Moment} - E[X]^2$$

Einleitung

Varianz : mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert

$$Var[X] = E[(X - EX)^2] = \underbrace{E[X^2]}_{2.Moment} - E[X]^2$$

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein
(viel kleiner als $E[X]^2$),
so ist X *fast immer fast gleich*
seinem Erwartungswert.

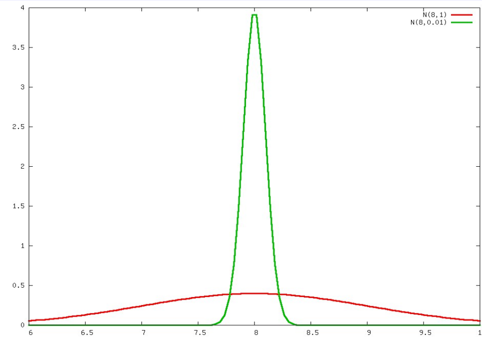
Einleitung

Varianz : mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert

$$Var[X] = E[(X - EX)^2] = \underbrace{E[X^2]}_{2.Moment} - E[X]^2$$

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein (viel kleiner als $E[X]^2$), so ist X *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert.



Die Methode des 2. Moments

- Verfahren zum Beweis der Existenz einer kombinatorischen Struktur mit bestimmten Eigenschaften.
- Spezialfall der probabilistischen Methode

Die Methode des 2. Moments

- Verfahren zum Beweis der Existenz einer kombinatorischen Struktur mit bestimmten Eigenschaften.
- Spezialfall der probabilistischen Methode
- verwendet Aussage:

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein (viel kleiner als $E[X]^2$), so ist X *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert.

Die Methode des 2. Moments

- Verfahren zum Beweis der Existenz einer kombinatorischen Struktur mit bestimmten Eigenschaften.
- Spezialfall der probabilistischen Methode
- verwendet Aussage:

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein (viel kleiner als $E[X]^2$), so ist X *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert.

- mathematisch formal fassbar in der Chebyshev-Ungleichung

Die Chebyshev-Ungleichung

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein
(viel kleiner als $E[X]^2$),
so ist X *fast immer fast gleich*
seinem Erwartungswert.

- Chebyshev-Ungleichung :

$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var[X]}{\lambda^2}$$

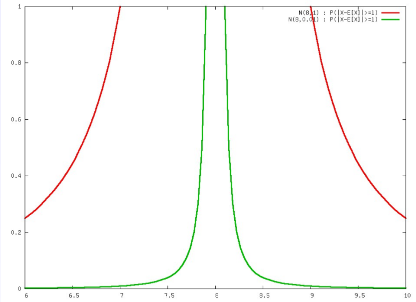
Die Chebyshev-Ungleichung

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein
(viel kleiner als $E[X]^2$),
so ist X *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert.

- Chebyshev-Ungleichung :

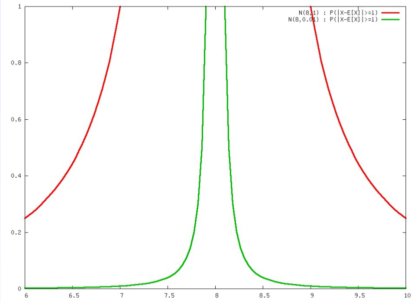
$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var[X]}{\lambda^2}$$



Die Chebyshev-Ungleichung

Kernsatz

Ist die Varianz sehr klein (viel kleiner als $E[X]^2$), so ist X *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert.



- Chebyshev-Ungleichung :

$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var[X]}{\lambda^2}$$

- Setze $\lambda = E[X]$:

$$P(X = 0) \leq P(|X - E[X]| \geq E[X]) \leq \frac{Var[X]}{E[X]^2}$$

Anwendung des Spezialfalls

- Betrachte eine zählbare Eigenschaft

Anwendung des Spezialfalls

- Betrachte eine zählbare Eigenschaft
- Existiert ein Objekt, dass diese Eigenschaft erfüllt ?

Anwendung des Spezialfalls

- Betrachte eine zählbare Eigenschaft
- Existiert ein Objekt, dass diese Eigenschaft erfüllt ?
- Lege einen Wahrscheinlichkeitsraum über alle Objekte

Anwendung des Spezialfalls

- Betrachte eine zählbare Eigenschaft
- Existiert ein Objekt, dass diese Eigenschaft erfüllt ?
- Lege einen Wahrscheinlichkeitsraum über alle Objekte
- Modelliere mit X die Anzahl der zählbaren Eigenschaften in einem Objekt

Anwendung des Spezialfalls

- Betrachte eine zählbare Eigenschaft
- Existiert ein Objekt, dass diese Eigenschaft erfüllt ?
- Lege einen Wahrscheinlichkeitsraum über alle Objekte
- Modelliere mit X die Anzahl der zählbaren Eigenschaften in einem Objekt
- Beweise mit der Gleichung $P(X = 0) < 1$.

Anwendung des Spezialfalls

- Betrachte eine zählbare Eigenschaft
- Existiert ein Objekt, dass diese Eigenschaft erfüllt ?
- Lege einen Wahrscheinlichkeitsraum über alle Objekte
- Modelliere mit X die Anzahl der zählbaren Eigenschaften in einem Objekt
- Beweise mit der Gleichung $P(X = 0) < 1$.
- $\Rightarrow$ Also muss ein Objekt mit der Eigenschaft existieren, weil $P(X \geq 1) > 0$.

Die Methode des 2.Moments

Die Methode des zweiten Moments allgemein:

Anwendung der Probabilistischen Methode
unter Verwendung der Chebyshev-Ungleichung

Übersicht

- Einleitung
- Chebyshev Ungleichung
- Mathematische Grundlagen
- Anwendung I: Mengenseparatoren
- Anwendung II: Schwellwertfunktion einer 4-Clique

Varianzrechnung

Sei $X = X_1 + ... + X_n$.
Dann ist

$$Var[X] = \sum_{i,j=1}^{n} Cov[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j]$$

Varianzrechnung

Sei $X = X_1 + ... + X_n$.
Dann ist

$$Var[X] = \sum_{i,j=1}^{n} Cov[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j]$$

Kovarianz $Cov[X_i, X_j] = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$.

Varianzrechnung

Sei $X = X_1 + ... + X_n$.
Dann ist

$$Var[X] = \sum_{i,j=1}^{n} Cov[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j]$$

Kovarianz $Cov[X_i, X_j] = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$.

X_i und X_j stochastisch unabhängig
$\Rightarrow E[X_i X_j] = E[X_i]E[X_j] \Rightarrow Cov[X_i, X_j] = 0$.
$Cov[X_i, X_j]$ leistet keinen Beitrag zur Varianz von X.

Chebyshev-Ungleichung für Folgen

Gegeben: $a_1, ..., a_n$ monoton steigend, $b_1, ..., b_n$ monoton fallend
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j)$$

Chebyshev-Ungleichung für Folgen

Gegeben: $a_1, ..., a_n$ monoton steigend, $b_1, ..., b_n$ monoton fallend

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j)$$

Beweis:

$$\sum_i a_i b_i - \frac{1}{n}\sum_i a_i \sum_j b_j = \sum_i a_i b_i - \frac{1}{n}\sum_i \sum_j a_i b_j$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i \sum_j (a_i b_i - a_i b_j) = \frac{1}{2*n}\sum_i \sum_j (a_i b_i + a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i)$$

$$= \frac{1}{2*n}\sum_i \sum_j (a_i(b_i - b_j) - a_j(b_i - b_j)) = \frac{1}{2*n}\sum_i \sum_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$$

da $a_1, ..., a_n \nearrow$ und $b_1, ..., b_n \searrow$

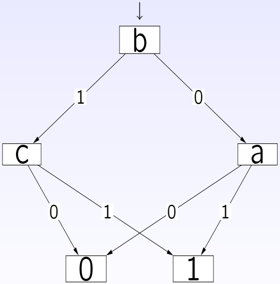
Anwendung I: Mengenseparatoren

- Betrachte Berechnungskomplexität von Funktionen
- Modell: Branching programs

Anwendung I: Mengenseparatoren

- Betrachte Berechnungskomplexität von Funktionen
- Modell: Branching programs
- Beispiel:

$f = (a \vee b) \wedge (\overline{b} \vee c)$



Nichtdeterministische Branching programs

- Erweiterung von BPs um „Rate" knoten

Nichtdeterministische Branching programs

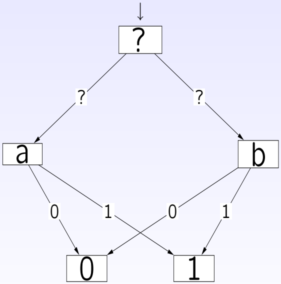
- Erweiterung von BPs um ,,Rate"knoten
- Wenn es einen Pfad zu einer 1-Senke gibt,wählt der Computer diesen aus.

Nichtdeterministische Branching programs

- Erweiterung von BPs um ,,Rate" knoten
- Wenn es einen Pfad zu einer 1-Senke gibt,wählt der Computer diesen aus.
- Entspricht logischem ,,$\vee$"

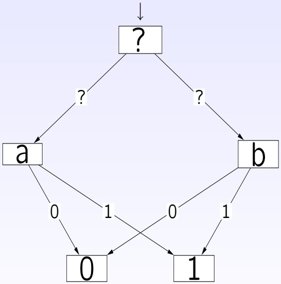
Nichtdeterministische Branching programs

- Erweiterung von BPs um ,,Rate" knoten
- Wenn es einen Pfad zu einer 1-Senke gibt,wählt der Computer diesen aus.
- Entspricht logischem ,,$\vee$"
- Beispiel:



Nichtdeterministische Branching programs

- Erweiterung von BPs um „Rate"knoten
- Wenn es einen Pfad zu einer 1-Senke gibt,wählt der Computer diesen aus.
- Entspricht logischem „$\vee$"
- Beispiel:



- Entspricht der Formel $f = a \vee b$

Verbesserung der Berechnungstiefe

- Zu einer Formel mit n Variablen gibt es ein BP mit Berechnungstiefe n.

Verbesserung der Berechnungstiefe

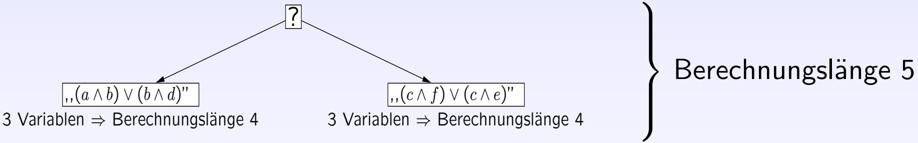
- Zu einer Formel mit n Variablen gibt es ein BP mit Berechnungstiefe n.
- Durch Nichtdeterminismus oft verbesserbar.

Verbesserung der Berechnungstiefe

- Zu einer Formel mit n Variablen gibt es ein BP mit Berechnungstiefe n.
- Durch Nichtdeterminismus oft verbesserbar.
- Beispiel: $f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$
  6 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 7 (B.tiefe 6)

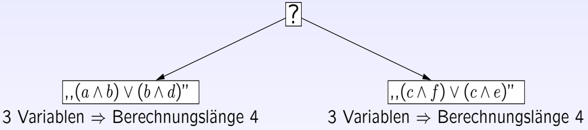
Verbesserung der Berechnungstiefe

- Zu einer Formel mit n Variablen gibt es ein BP mit Berechnungstiefe n.
- Durch Nichtdeterminismus oft verbesserbar.
- Beispiel: $f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$
  6 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 7 (B.tiefe 6)



Verbesserung der Berechnungstiefe

- Zu einer Formel mit n Variablen gibt es ein BP mit Berechnungstiefe n.
- Durch Nichtdeterminismus oft verbesserbar.
- Beispiel: $f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$
  6 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 7 (B.tiefe 6)

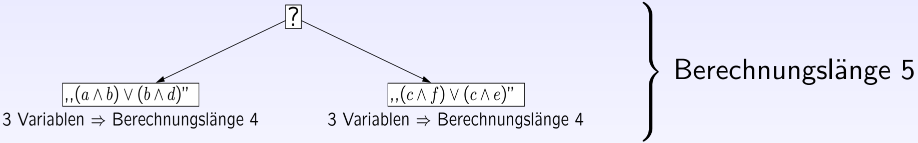


Berechnungslänge 5

- Frage: Wie gut ist Reduktion für gegebene Formel?
- Antwort: Satz von Beame, Saks, Thathachar

Verbesserung der Berechnungstiefe

- Zu einer Formel mit n Variablen gibt es ein BP mit Berechnungstiefe n.
- Durch Nichtdeterminismus oft verbesserbar.
- Beispiel: $f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$
  6 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 7 (B.tiefe 6)



- Frage: Wie gut ist Reduktion für gegebene Formel?
- Antwort: Satz von Beame, Saks, Thathachar
- Dazu: Umformulierung in Mengen

Separator

Sei $\mathcal{F} = \{F_1, ...F_m\}, F_i \subseteq X$

Separator

Paar (S,T) disjunkter Teilmengen von X, wobei jedes Element von $\mathcal{F}$ disjunkt zu S oder zu T ist.

Separator

Sei $\mathcal{F} = \{F_1, ...F_m\}, F_i \subseteq X$

Separator

Paar (S,T) disjunkter Teilmengen von X, wobei jedes Element von $\mathcal{F}$ disjunkt zu S oder zu T ist.

Beispiel

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$

$S = \{1, 3\}, T = \{4, 5\}$

(S,T) ist Separator von $\mathcal{F}$.

Separator

Sei $\mathcal{F} = \{F_1, ...F_m\}, F_i \subseteq X$

Separator

Paar (S,T) disjunkter Teilmengen von X, wobei jedes Element von $\mathcal{F}$ disjunkt zu S oder zu T ist.

Beispiel

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$

$S = \{1, 3\}, T = \{4, 5\}$

(S,T) ist Separator von $\mathcal{F}$.

Die *Größe* eines Separators ist das Minimum von $|S|$ und $|T|$.

Separator

Sei $\mathcal{F} = \{F_1, ...F_m\}, F_i \subseteq X$

Separator

Paar (S,T) disjunkter Teilmengen von X, wobei jedes Element von $\mathcal{F}$ disjunkt zu S oder zu T ist.

Beispiel
$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$
$S = \{1, 3\}, T = \{4, 5\}$
(S,T) ist Separator von $\mathcal{F}$.

Die *Größe* eines Separators ist das Minimum von $|S|$ und $|T|$.

Beispiel
Die Größe von (S,T) ist min($|\{1, 3\}|$,$|\{4, 5\}|$)=2

Grad eines Elementes

Grad d_x

Anzahl der Elemente von F, die x enthalten.

Grad eines Elementes

Grad d_x

Anzahl der Elemente von F, die x enthalten.

Beispiel
$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$
Der Grad d_5 ist 2.

Grad eines Elementes

Grad d_x

Anzahl der Elemente von F, die x enthalten.

Beispiel

$\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{2,5\}\}$

Der Grad d_5 ist 2.

durchschnittlicher Grad von $\mathcal{F}$

$$d = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} d_x$$

Anwendung auf BP-Problem

$$f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$$

$$\boxed{?}$$

$\boxed{„(a \wedge b) \vee (b \wedge d)“}$

3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

$\boxed{„(c \wedge f) \vee (c \wedge e)“}$

3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

Anwendung auf BP-Problem

$$f = (a \land b) \lor (c \land f) \lor (b \land d) \lor (c \land e)$$

$\boxed{?}$

$\boxed{„(a \land b) \lor (b \land d)"}$

3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

$\boxed{„(c \land f) \lor (c \land e)"}$

3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

- X: Menge der Variablen $\quad X = \{a, b, c, d, e, f\}$

Anwendung auf BP-Problem

$$f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$$

$\boxed{?}$

$\boxed{„(a \wedge b) \vee (b \wedge d)“}$
3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

$\boxed{„(c \wedge f) \vee (c \wedge e)“}$
3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

- X: Menge der Variablen — $X = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\mathcal{F}$: Formel als Familie — $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}$

Anwendung auf BP-Problem

$$f = (a \wedge b) \vee (c \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge e)$$

$\boxed{?}$

$\boxed{„(a \wedge b) \vee (b \wedge d)“}$

3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

$\boxed{„(c \wedge f) \vee (c \wedge e)“}$

3 Variablen $\Rightarrow$ Berechnungslänge 4

- X: Menge der Variablen
- $\mathcal{F}$: Formel als Familie
- S,T: Mengen der eliminierten Variablen

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}$

$S = \{c, e, f\}, \ T = \{a, b, d\}$

Satz von Beame,Saks,Thathachar('98)

Satz

Sei X eine Menge mit N Elementen.
$\mathcal{F} = \{F_1, ..., F_m\}$, $F_i \neq \emptyset$, $F_i \subseteq X$, $|F_i| \leq r$.
d sei der durchschnittliche Grad von $\mathcal{F}$.
Dann hat $\mathcal{F}$ einen Separator der Größe mindestens $(1-\delta)2^{-d}n$, wobei

$$\delta = \sqrt{\frac{dr2^{d+1}}{n}}$$

Beweis des Satzes:

Beweis mit der probabilistischen Methode:

Beweis des Satzes:

Beweis mit der probabilistischen Methode:

- Lege Wahrscheinlichkeitsraum über alle möglichen Separatoren

Beweis des Satzes:

Beweis mit der probabilistischen Methode:

- Lege Wahrscheinlichkeitsraum über alle möglichen Separatoren
- Beweise,dass $P(|(S, T)| \geq (1 - \delta)2^{-d}n) > 0$

Beweis des Satzes:

Beweis mit der probabilistischen Methode:

- Lege Wahrscheinlichkeitsraum über alle möglichen Separatoren
- Beweise,dass $P(|(S, T)| \geq (1-\delta)2^{-d}n) > 0$
- Dann muss ein Separator mit gewünschter Größe existieren.

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit $1/2$ rot oder blau.

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit $1/2$ rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit $1/2$ rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.
- T sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ blau sind.

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit 1/2 rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.
- T sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ blau sind.

Beispiel

Sei $\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{2,4,5\},\{2,6,8\},\{3,5,8\},\{2,7\},\{3,6\}\}$

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit $1/2$ rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.
- T sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ blau sind.

Beispiel
Sei $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 6, 8\}, \{3, 5, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}\}$

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit $1/2$ rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.
- T sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ blau sind.

Beispiel
Sei $\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{2,4,5\},\{2,6,8\},\{3,5,8\},\{2,7\},\{3,6\}\}$
$S = \{1,4,7\}$

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit $1/2$ rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.
- T sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ blau sind.

Beispiel
Sei $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 6, 8\}, \{3, 5, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}\}$
$S = \{1, 4, 7\}$
$T = \{6, 8\}$

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Seien X alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden Elemente und $n = |X|$.

- Färbe jedes $F \in \mathcal{F}$ unabhängig mit W'keit 1/2 rot oder blau.
- S sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ rot sind.
- T sei die Menge der $x \in X$,für die alle F_i mit $x \in F_i$ blau sind.

Beispiel
Sei $\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{2,4,5\},\{2,6,8\},\{3,5,8\},\{2,7\},\{3,6\}\}$
$S = \{1,4,7\}$
$T = \{6,8\}$

Es gilt: $S \cap T = \emptyset$
sowie $F \cap S = \emptyset$ oder $F \cap T = \emptyset$ $\forall F \in \mathcal{F}$.

Beweis des Satzes

Es bleibt zu zeigen, dass $P(|(S,T)| \geq (1-\delta)2^{-d}n) > 0$.

Beweis des Satzes

Es bleibt zu zeigen, dass $P(|(S, T)| \geq (1-\delta)2^{-d}n) > 0$.

- Sei Z_x die Indikatorvariable des Ereignisses $\{x \in S\}$.
- Es gilt: $P(Z_x = 1) = P(x \in S) = 2^{-d_x}$.
- $E[Z_x] = P(Z_x = 1) = 2^{-d_x}$.

Beweis des Satzes

Es bleibt zu zeigen, dass $P(|(S,T)| \geq (1-\delta)2^{-d}n) > 0$.

- Sei Z_x die Indikatorvariable des Ereignisses $\{x \in S\}$.
- Es gilt: $P(Z_x = 1) = P(x \in S) = 2^{-d_x}$.
- $E[Z_x] = P(Z_x = 1) = 2^{-d_x}$.
- Nun sei $Z = \sum_x Z_x$. Also gilt: $Z = |S|$

Beweis des Satzes

Es bleibt zu zeigen, dass $P(|(S,T)| \geq (1-\delta)2^{-d}n) > 0$.

- Sei Z_x die Indikatorvariable des Ereignisses $\{x \in S\}$.
- Es gilt: $P(Z_x = 1) = P(x \in S) = 2^{-d_x}$.
- $E[Z_x] = P(Z_x = 1) = 2^{-d_x}$.
- Nun sei $Z = \sum_x Z_x$. Also gilt: $Z = |S|$

$$E[Z] = \sum_x E[Z_x] = \sum_x 2^{-d_x} \geq n2^{-\sum_x d_x/n} = n2^{-d}$$

Beweis des Satzes

arithmetisch-geometrische Ungleichung

Aus erstem Vortrag bekannt
Seien $a_1,..,a_n$ nicht negativ.
Dann gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$$

$$E[Z] = \sum_x E[Z_x] = \sum_x 2^{-d_x} \geq n2^{-\sum_x d_x/n} = n2^{-d}$$

Beschränkung der Varianz

- Es soll gezeigt werden, dass Z *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert ist.
- Beschränkung der Varianz nach oben:

$$Var[Z] = \sum_{x} Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

Beschränkung der Varianz

- Es soll gezeigt werden, dass Z *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert ist.
- Beschränkung der Varianz nach oben:

$$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

$Z_x \in \{0,1\}$. Daher gilt:

$$Var[Z_x] = E[Z_x] \underbrace{-E[Z_x]^2}_{\leq 0} \leq E[Z_x]$$

Hieraus folgt:

$$\sum_x Var[Z_x] \leq E[Z]$$

Beschränkung der Varianz

- Es soll gezeigt werden, dass Z *fast immer fast gleich* seinem Erwartungswert ist.
- Beschränkung der Varianz nach oben:

$$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

$Z_x \in \{0, 1\}$. Daher gilt:

$$Var[Z_x] = E[Z_x] \underbrace{-E[Z_x]^2}_{\leq 0} \leq E[Z_x]$$

Hieraus folgt:

$$\sum_x Var[Z_x] \leq E[Z]$$

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.
  $\Rightarrow Z_x, Z_y$ sind stochastisch unabhängig.

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.
  $\Rightarrow Z_x, Z_y$ sind stochastisch unabhängig.
  $\Rightarrow Cov(Z_x, Z_y) = 0$

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.
  $\Rightarrow Z_x, Z_y$ sind stochastisch unabhängig.
  $\Rightarrow Cov(Z_x, Z_y) = 0$
- 2.Fall:$\exists F \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in F$.

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.
  $\Rightarrow Z_x, Z_y$ sind stochastisch unabhängig.
  $\Rightarrow Cov(Z_x, Z_y) = 0$
- 2.Fall:$\exists F \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in F$.
  Für ein festes x gibt es maximal $(r-1)d_x$ Paare.

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.
  $\Rightarrow Z_x, Z_y$ sind stochastisch unabhängig.
  $\Rightarrow Cov(Z_x, Z_y) = 0$
- 2.Fall:$\exists F \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in F$.
  Für ein festes x gibt es maximal $(r-1)d_x$ Paare.
  Für ein solches Paar x,y gilt:

$$Cov(Z_x, Z_y) = E[Z_x Z_y] \underbrace{-E[Z_x]E[Z_y]}_{\leq 0} \leq E[Z_x Z_y] \leq E[Z_x] = 2^{-d_x}$$

Beschränkung der Varianz II

$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$

Betrachte $x, y \in X$.

- 1.Fall: kein $F \in \mathcal{F}$ enthält x und y.
  $\Rightarrow Z_x, Z_y$ sind stochastisch unabhängig.
  $\Rightarrow Cov(Z_x, Z_y) = 0$
- 2.Fall:$\exists F \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in F$.
  Für ein festes x gibt es maximal $(r-1)d_x$ Paare.
  Für ein solches Paar x,y gilt:

$$Cov(Z_x, Z_y) = E[Z_x Z_y] \underbrace{-E[Z_x]E[Z_y]}_{\leq 0} \leq E[Z_x Z_y] \leq E[Z_x] = 2^{-d_x}$$

$$\sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y) \leq (r-1) \sum_x d_x 2^{-d_x}$$

Beschränkung der Varianz III

$$Var[Z] = \sum_{x} Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

$$\sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y) \leq (r-1) \sum_{x} d_x 2^{-d_x}$$

Sortiere $\{d_x\}$ aufsteigend. Dann ist $\{2^{-d_x}\}$ absteigend sortiert.

Beschränkung der Varianz III

$$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

$$\sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y) \leq (r-1) \sum_x d_x 2^{-d_x}$$

Sortiere $\{d_x\}$ aufsteigend. Dann ist $\{2^{-d_x}\}$ absteigend sortiert.

Chebyshev-Ungleichung für Folgen

Gegeben: $a_1, \ldots, a_n$ monoton steigend, $b_1, \ldots, b_n$ monoton fallend
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

Beschränkung der Varianz III

$$Var[Z] = \sum_x Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

$$\sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y) \leq (r-1) \sum_x d_x 2^{-d_x}$$

$$\leq \frac{r-1}{n} (\sum_x 2^{-d_x})(\sum_x d_x) = d(r-1)E[Z]$$

Sortiere $\{d_x\}$ aufsteigend. Dann ist $\{2^{-d_x}\}$ absteigend sortiert.

Chebyshev-Ungleichung für Folgen

Gegeben: $a_1, ..., a_n$ monoton steigend, $b_1, ..., b_n$ monoton fallend
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

Beschränkung der Varianz III

$$Var[Z] = \sum_{x} Var[Z_x] + \sum_{x \neq y} Cov(Z_x, Z_y)$$

$$Var[Z] \leq (d(r-1)+1)E[Z] \leq drE[Z],$$

da $d = \frac{1}{n}\sum_x d_x \geq 1$ gilt.

Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

Chebyshev-Ungleichung

$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var[X]}{\lambda^2}$$

$$P(Z < (1-\delta)E[Z]) \leq P(|Z-E[Z]| > \delta E[Z]) < \frac{Var[Z]}{\delta^2 E[Z]^2} \leq \frac{dr}{\delta^2 E[Z]}$$

Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

Chebyshev-Ungleichung

$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var[X]}{\lambda^2}$$

$$P(Z < (1-\delta)E[Z]) \leq P(|Z - E[Z]| > \delta E[Z]) < \frac{Var[Z]}{\delta^2 E[Z]^2} \leq \frac{dr}{\delta^2 E[Z]}$$

Einsetzen von

$$\delta = \sqrt{\frac{dr2^{d+1}}{n}}$$

und $Z = |S|$ ergibt:

$$P(|S| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{drn}{dr2^{d+1}E[Z]} \leq \frac{n}{2^{d+1}n2^{-d}} = \frac{1}{2}$$

Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

Chebyshev-Ungleichung

$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var[X]}{\lambda^2}$$

$$P(Z < (1-\delta)E[Z]) \leq P(|Z-E[Z]| > \delta E[Z]) < \frac{Var[Z]}{\delta^2 E[Z]^2} \leq \frac{dr}{\delta^2 E[Z]}$$

Einsetzen von

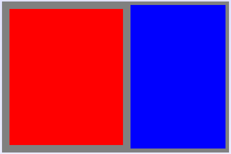
$$\delta = \sqrt{\frac{dr2^{d+1}}{n}}$$

und $Z = |S|$ ergibt:

$$P(|S| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{drn}{dr2^{d+1}E[Z]} \leq \frac{n}{2^{d+1}n2^{-d}} = \frac{1}{2}$$

Analog lässt sich zeigen: $P(|T| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{1}{2}$

Beweisschluss

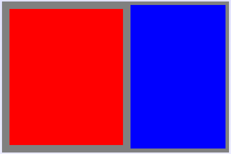


$P(|S| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{1}{2}$

$P(|T| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{1}{2}$

$P(|S| \geq (1-\delta)E[Z], |T| \geq (1-\delta)E[Z]) > 0$

Beweisschluss



$P(|S| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{1}{2}$

$P(|T| < (1-\delta)E[Z]) < \frac{1}{2}$

$P(|S| \geq (1-\delta)E[Z], |T| \geq (1-\delta)E[Z]) > 0$

Somit existiert ein Separator (S,T), der das Theorem erfüllt.

Anwendung II: 4-Clique im Zufallsgraphen

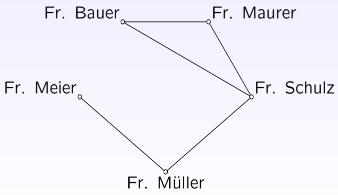
- n ältere Damen aus Aachen wollen Bridge spielen.
- Für ein Bridgespiel braucht man 4 Spieler
- Die Damen spielen nur mit anderen Damen, die sie mögen.

Anwendung II: 4-Clique im Zufallsgraphen

- n ältere Damen aus Aachen wollen Bridge spielen.
- Für ein Bridgespiel braucht man 4 Spieler
- Die Damen spielen nur mit anderen Damen, die sie mögen.
- Annahme: Zwei Aachener Damen mögen sich mit Wahrscheinlichkeit p
  unabhängig davon, ob sie andere Damen (nicht) mögen.

Anwendung II: 4-Clique im Zufallsgraphen

- n ältere Damen aus Aachen wollen Bridge spielen.
- Für ein Bridgespiel braucht man 4 Spieler
- Die Damen spielen nur mit anderen Damen, die sie mögen.
- Annahme: Zwei Aachener Damen mögen sich mit Wahrscheinlichkeit p
  unabhängig davon, ob sie andere Damen (nicht) mögen.
- Darstellung als Graph:



Zufallsgraph

- Graph G(n,p) mit n Knoten
- Jede Kante ist stochastisch unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p vorhanden.

Zufallsgraph

- Graph G(n,p) mit n Knoten
- Jede Kante ist stochastisch unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p vorhanden.
- Ist p gering, so enthält G(n,p) wahrscheinlich wenige Knoten.
- Ist p hoch, so enthält G(n,p) wahrscheinlich viele Knoten.

Zufallsgraph

- Graph G(n,p) mit n Knoten
- Jede Kante ist stochastisch unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p vorhanden.
- Ist p gering, so enthält G(n,p) wahrscheinlich wenige Knoten.
- Ist p hoch, so enthält G(n,p) wahrscheinlich viele Knoten.
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Graph eine 4-Clique enthält? (Wann existiert eine Bridgegruppe?)
- Naiv : die Wahrscheinlichkeit steigt linear mit p.

Zufallsgraph

- Graph G(n,p) mit n Knoten
- Jede Kante ist stochastisch unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p vorhanden.

- Ist p gering, so enthält G(n,p) wahrscheinlich wenige Knoten.
- Ist p hoch, so enthält G(n,p) wahrscheinlich viele Knoten.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Graph eine 4-Clique enthält? (Wann existiert eine Bridgegruppe?)
- Naiv : die Wahrscheinlichkeit steigt linear mit p.

Tatsächlich : scharf begrenzter Schwellwert p(n), so dass gilt:
p etwas kleiner als p(n) $\Rightarrow$ G enthält wahrscheinlich keine 4-Clique.
p etwas größer als p(n) $\Rightarrow$ G enthält wahrscheinlich eine 4-Clique

Schwellwertfunktion für eine 4-Clique

Satz

Die Schwellwertfunktion für einen Zufallsgraphen G(n,p), eine 4-Clique zu enthalten, ist $p = n^{-2/3}$.

Schwellwertfunktion für eine 4-Clique

Satz

Die Schwellwertfunktion für einen Zufallsgraphen G(n,p), eine 4-Clique zu enthalten, ist $p = n^{-2/3}$.

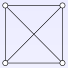
Beweis:

Seien

S Menge von 4 Knoten

A_S das Ereignis, dass S eine 4-Clique in G(n,p) induziert

X_S die Indikatorvariable von A_S.



Schwellwertfunktion für eine 4-Clique

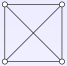
Satz

Die Schwellwertfunktion für einen Zufallsgraphen G(n,p), eine 4-Clique zu enthalten, ist $p = n^{-2/3}$.

Beweis:

Seien

- S Menge von 4 Knoten
- A_S das Ereignis, dass S eine 4-Clique in G(n,p) induziert
- X_S die Indikatorvariable von A_S.



- eine 4-Clique enthält 6 Kanten
- Die Kanten kommen s.u. mit W'keit p im Graphen vor
- $P(A_S) = p^6 \Rightarrow P(X_S = 1) = p^6 \Rightarrow E[X_S] = p^6$

Das Ereignis ,,G enthält eine 4-Clique"

Sei $X = \sum X_S$ die Anzahl der 4-Cliquen in G(n,p).
$p = n^{-2/3}$ ist ein Schwellwert des Ereignisses ,,G enthält eine 4-Clique".

Das Ereignis „G enthält eine 4-Clique"

Sei $X = \sum X_S$ die Anzahl der 4-Cliquen in G(n,p).
$p = n^{-2/3}$ ist ein Schwellwert des Ereignisses „G enthält eine 4-Clique".
Formal:

1. $P(X \geq 1) \to 0$ für $p \ll n^{-2/3}$
2. $P(X \geq 1) \to 1$ für $p \gg n^{-2/3}$

Beweis des Schwellwertes I

Beweis zu 1.:$P(X \geq 1) \to 0$ für $p \ll n^{-2/3}$:
Folgt aus der Markov-Ungleichung:

Markov-Ungleichung

$$P(|X| > c) \leq \frac{E(|X|)}{c} \qquad \forall c > 0$$

Beweis des Schwellwertes I

Beweis zu 1.:$P(X \geq 1) \to 0$ für $p \ll n^{-2/3}$:
Folgt aus der Markov-Ungleichung:

Markov-Ungleichung

$$P(|X| > c) \leq \frac{E(|X|)}{c} \qquad \forall c > 0$$

Sei $X \geq 0$, setze c=1 :

$$P(X \geq 1) \leq E[X] = \binom{n}{4} p^6 \leq \frac{n^4 p^6}{24} \to 0$$

für $p \ll n^{-2/3}$

Beweis des Schwellwertes II

Beweis zu 2.: $P(X \geq 1) \to 1$ für $p \gg n^{-2/3}$
Sei $p \gg n^{-2/3}$.

$P(X \geq 1) \to 1 \Leftrightarrow P(X = 0) \to 0.$

Spezielle Chebyshev Ungleichung:

$$P(X = 0) \leq \frac{Var[X]}{E[X]^2}$$

$\Rightarrow$ Varianz nach oben abschätzen.
Es gilt:

$$Var[X] = \sum_{S} Var[X_S] + \sum_{S \neq T} Cov(X_S, X_T)$$

Beweis des Schwellwertes II:Varianz

$$Var[X] = \sum_{S} Var[X_S] + \sum_{S \neq T} Cov(X_S, X_T)$$

Es gilt:

$$Var[X_S] = E[X_S] - \underbrace{E[X_S]^2}_{\geq 0} \leq E[X_S] = p^6$$

- Es gibt $\binom{n}{4} = O(n^4)$ Mengen S $\Rightarrow$ erste Summe: $O(n^4 p^6)$

Beweis des Schwellwertes II:Varianz

$$Var[X] = \sum_S Var[X_S] + \sum_{S \neq T} Cov(X_S, X_T)$$

Betrachte Paare $S \neq T$:

- Haben die von S und T induzierten Graphen keine gemeinsamen Kanten $\Rightarrow X_S, X_T$ sind s.u.
  $\Rightarrow Cov(X_S, X_T) = 0$

Beweis des Schwellwertes II:Varianz

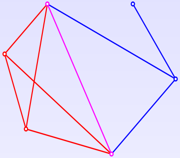
$$Var[X] = \sum_S Var[X_S] + \sum_{S \neq T} Cov(X_S, X_T)$$

Betrachte Paare $S \neq T$:

- Haben die von S und T induzierten Graphen keine gemeinsamen Kanten $\Rightarrow X_S, X_T$ sind s.u.
  $\Rightarrow Cov(X_S, X_T) = 0$
- Wirksame Anteile für $|S \cap T| = 2$ (eine gem. Kante) und $|S \cap T| = 3$ (drei gem. Kanten)

Beweis des Schwellwertes II:Covarianz I

Fall 1:$|S \cap T| = 2$ (eine gem. Kante)



Es gibt $\binom{n}{4}\binom{4}{2}\binom{n-4}{2} \in O(n^6)$
Paare S,T mit $|S \cap T| = 2$

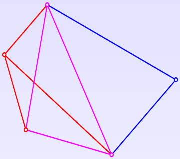
für sie ist

$$Cov(X_S, X_T) = E[X_S X_T] - \underbrace{E[X_S]E[X_T]}_{\geq 0} \leq E[X_S X_T] = O(p^{11}),$$

da $S \cup T$ elf Kanten induziert. $\Rightarrow$ Beitrag: $O(p^{11} n^6)$

Beweis des Schwellwertes II:Covarianz II

Fall 1:$|S \cap T| = 3$ (drei gem. Kante)



Es gibt $\binom{n}{4}\binom{4}{3}(n-4) \in O(n^5)$
Paare S,T mit $|S \cap T| = 3$

für sie ist

$$Cov(X_S, X_T) = E[X_S X_T] - \underbrace{E[X_S]E[X_T]}_{\geq 0} \leq E[X_S X_T] = O(p^9),$$

da $S \cup T$ 9 Kanten induziert. $\Rightarrow$ Beitrag: $O(p^9 n^5)$

Begrenzung der Varianz

Insgesamt folgt für die Varianz:

$$Var[X] = O(n^4p^6 + n^6p^{11} + n^5p^9) = o(n^8p^{12}) = o(E[X]^2),$$

da $p \gg n^{-2/3}$.

Begrenzung der Varianz

Insgesamt folgt für die Varianz:

$$Var[X] = O(n^4 p^6 + n^6 p^{11} + n^5 p^9) = o(n^8 p^{12}) = o(E[X]^2),$$

da $p \gg n^{-2/3}$.
Die Chebyshev Ungleichung liefert:

$$P(X = 0) \leq \frac{Var[X]}{E[X]^2} \leq o(1)$$

Für $p \gg n^{-2/3}$ enthält also G(n,p) wahrscheinlich eine 4-Clique.

Begrenzung der Varianz

Insgesamt folgt für die Varianz:

$$Var[X] = O(n^4p^6 + n^6p^{11} + n^5p^9) = o(n^8p^{12}) = o(E[X]^2),$$

da $p \gg n^{-2/3}$.
Die Chebyshev Ungleichung liefert:

$$P(X = 0) \leq \frac{Var[X]}{E[X]^2} \leq o(1)$$

Für $p \gg n^{-2/3}$ enthält also G(n,p) wahrscheinlich eine 4-Clique.

Somit ist $p = n^{-2/3}$ eine Schwellwertfunktion für das Ereignis „G(n,p) enthält eine 4-Clique".

Zusammenfassung

- Methode des 2. Moments: Probabilistische Existenzbeweise unter Verwendung der Chebyshev Ungleichung
- immer dann sinnvoll, wenn die Varianz von X klein gegenüber $E[X]^2$ ist
- Kombinatorische Fragestellungen elegant lösbar, wenn man geeigneten Zufallsraum gewählt hat