Zusammenfassung für das Seminar vom 07.11.2005

Bingfeng Wang

19.11.2005

1 Einführung

Im Seminar wurde ein noch schnellerer Algorithmus für Steinerbaumproblem vorgestellt. Als Grundlage wurden drei Definitionen angegeben, sowie zwei Lemmata bewiesen. Mit der Hilfe von Lemma 1 und Lemma 2 ist es möglich, einen schnellen Algorithmus zu entwickeln.

2 Definitionen

Region: Eine *Region* ist eigentlich ein maximaler Teilbaum von einem optimalen Steinerbaum, er besitzt nur Blätter. D.h. es dürfen innere Terminale bei dem Teilbaum nicht auftreten. Die Abbildung 1 zeigt uns die grafische Darstellung der Definition.

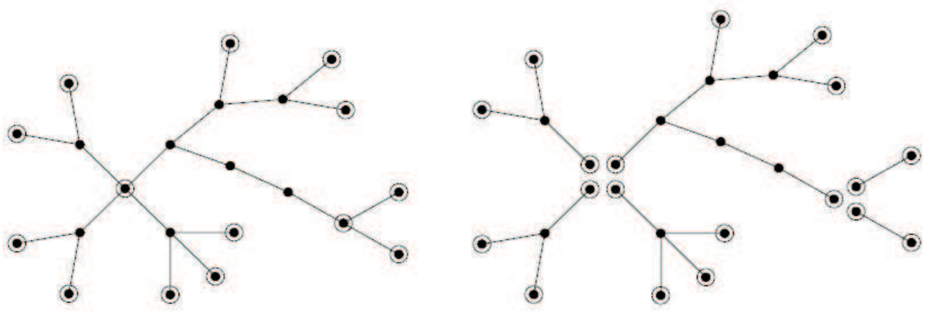

Figure 1: Regionen

Konföderation: Eine Vereinigung der verbundenen Reigionen nennen wir Konföderation. Die Menge von den zur Konföderation gehörenden Terminalen wird als Konföderierte bezeichnet.

q-granular: Wir sagen, eine Terminalmenge von einem optimalen Steinerbaum ist $q - granular$, falls darin jede Region maximal q Terminale besitzt.

3 Lemmata

Lemma 1 *Sei (G,ℓ) ein Netzwerk und T ein optimaler Steinerbaum für Z$\subseteq$ V[G]. Eine beliebige (T,Z)-Konföderation* T' *stellt einen optimalen Steinerbaum für ihre Terminalmenge dar.*

Korrektheit von Lemma 1: Angenommen, es existiert ein Steinerbaum S' für $Z \bigcap V[T']$, der kostengüstiger als T' ist, dann ersetzen wir T' durch S', sodaß T noch optimaler werden kann. Wie wir aber wissen, ist T bereits ein optimaler Steinerbaum, es ist also ein Widerspruch aufgetreten. Deshalb ist Lemma 1 korrekt.

Lemma 2 *Sei (G,ℓ) ein Netzwerk und* $Z_1, Z_2 \subseteq V[G] mit |Z_1 \cap Z_2| = 1$. *Existieren Kante-disjunkte Optimale Steinerbäume* T_1 *für* Z_1 *und* T_2 *für* Z_2, *so dass* $T_1 \cup T_2$ *ein optimaler Steinerbaum für* $Z_1 \cup Z_2$ *ist, dann ist die Vereinigung* $T_1' \cup T_2'$ *von zwei beliebigen optimalen Steinerbäumen* T_1' *für* Z_1 *und* T_2' *für* Z_2 *auch ein optimaler Steinerbaum für* $Z_1 \cup Z_2$.

Korrektheit von Lemma 2: Sei $\ell(T_1) = x$ und $\ell(T_2) = y$, gilt $\ell(T_1 \cup T_2) = \ell(T_1) + \ell(T_2) = x + y$ (nach Voraussetzung). Weil T_1' ein optimaler Steinerbaum für Z_1 und T_2' ein optimaler Steinerbaum für Z_2 ist, d.h. T_1' besitzt gleiches Gewicht wie T_1 und T_2' besitzt gleiches Gewicht wie T_2, so folgt $\ell(T_1') = \ell(T_1) = x$ und $\ell(T_2') = \ell(T_2) = y$. Da die Ungleichung $\ell(T_1' \cup T_2') \leq \ell(T_1') + \ell(T_2')$ trivial korrekt ist, formen wir jetzt die Gleichung um: $\ell(T_1' \cup T_2') \leq x + y = \ell(T_1 \cup T_2)$. Weil $\ell(T_1 \cup T_2)$ optimal ist, folgt es schliesslich: $\ell(T_1' \cup T_2')$ ist auch optimal.

4 Algorithmus

Vorausgesetzt daß Z $q - granular$ ist, gilt der folgende Algorithmus für einen optimalen Steinerbaum für Z.

```
01: for all Z' ⊆ Z such that |Z'| ≤ q do
02:   S(Z') ← Dreyfus − Wagner(G, Z')
03: od;
04: for all Z' ⊆ Z(ascending size) such that |Z'| > q (do)
05:   S(Z') ← G;
06:   for all Z'' ⊆ Z' and v ∈ Z'' such that 2 ≤ |Z''| ≤ q do
07:         if ℓ(S(Z'')) + ℓ(S(Z' − Z'' ∪ {v})) < ℓ(S(Z'))
08:         then S(Z') ← S(Z'') ∪ S(Z' − Z'' ∪ {v}) fi
09:   od
10:od;
11:return S(Z)
```

Korrektheit des Algorithmus:

- Die erste Schleife(Zeile 1 bis 3) läuft nur für den Fall durch, daß T selber eine Region ist.
- Die zweite Schleife wird durchlaufen für die Konföderation Z', die eine Vereinigung von mehren Regionen ist, mit $|Z'| > q$. Wir wählen die Konföderation Z' schleifeweise nach steigender Größe aus. Z.B. für das erste mal $|Z'| = q + 1$, für das zweite mal$|Z'| = q + 2$, usw.
- Jetzt betrachten wir die innere Schleife von zweiter Schleife. T' ist eine Konföderation für Z', nämlich $T' = R_1 \cup \cdots \cup R_t$, wobei $t \geq 2$. Die Funktion von dieser Schleife ist, eine Region R_1 aufzufinden, R_1 hat nur einen gemeinsamen Knoten mit anderen Regionen $R_1 \cup \cdots \cup R_t$. Nach Lemma 1 ist R_1 ein optimaler Steinerbaum, $R_1 \cup \cdots \cup R_t$ ist auch ein optimaler Steinerbaum. Nach Lemma 2 stellt die Vereinigung von der Region R_1 mit anderen Regionen $R_1 \cup \cdots \cup R_t$ wieder ein optimalen Steinerbaum her. Bei der nächsten Schleife kann so eine weitere Region wie R_1 gefunden werden, das Progamm wird rekursiv laufen, bis daß ein vollständiger optimaler Steinerbaum erzeugt worden ist.