Handout f. die Session vom 23.Oktober 2005

Holger Dötsch

30. Oktober 2005

1 Reprise

Nachdem einführend das Steinerbaumproblem vorgestellt wurde und der Dreyfus-Wagner-Algorithmus sowohl formal, als auch in Pseudo Code besprochen wurde, ging es in dieser Session hauptsächlich um die Erarbeitung des Beweises und die Plausibilisierung der angegebenen Laufzeit.

Schliesslich wurde gegen Ende noch ein Kurzvortrag mit einem alternativen Lösungsansatz vorgestellt.

2 Beweis des Dreyfus-Wagner-Algorithmus

Zur Erinnerung hier nochmals die zu beweisenden Behauptungen:
(1) Für jede Knotenmenge $X \subseteq Y$ mit $X \neq \emptyset$ und jedes $v \in V \setminus X$:

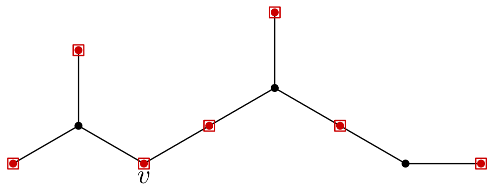
$$s_v(X \cup \{v\}) = \min_{\emptyset \neq X' \subset X} \{\, s(X' \cup \{v\}) + s((X \setminus X') \cup \{v\}) \,\}$$

(2) Für jede Knotenmenge $X \subseteq Y$ mit $X \neq \emptyset$ und jedes $v \in V \setminus X$:

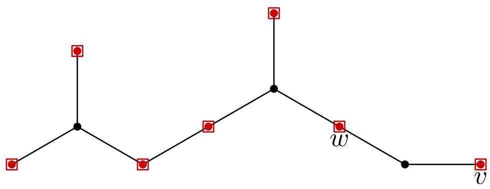
$$s(X \cup \{v\}) = \min \Big\{ \min_{w \in X} \{\, p(v,w) + s(X) \,\}, \\ \min_{w \in V \setminus X} \{\, p(v,w) + s_w(X \cup \{w\}) \,\} \Big\}$$

Zum Beweis von (1) trennt man den den Steinerbaum T an v in zwei Teilbäume T_1 und T_2. Diese Möglichkeit besteht, da nach Definition von $s_v(X \cup \{v\})$ der Knoten v mindestens den Grad 2 hat. Die Definition impliziert ebenfalls, dass $s_v(X \cup \{v\}) \geq s(X \cup \{v\})$ gilt. Das Minimum der Addition der Kosten aller möglichen Bäume T_1 und T_2 ergibt somit den optimalen Steinerbaum für $X \cup \{v\}$ (also $s(X \cup \{v\})$). Daraus folgt $s_v(X \cup \{v\}) \geq \min_{\emptyset \neq X' \subset X} \big\{ s(X' \cup \{v\}) + s((X \setminus X') \cup \{v\}) \big\}$. Da nach Annahme v mindestens den Grad 2 hat gilt $s_v(X \cup \{v\}) = s(X \cup \{v\})$ und damit Behauptung (1).

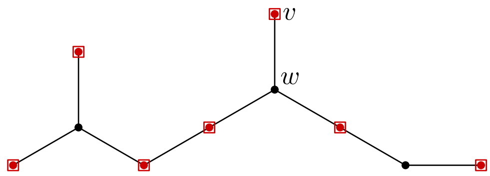
Um (2) zu beweisen, werden drei Fälle unterschieden:
Fall 1. v hat in einem optimalen Steinerbaum mindestens Grad 2. Dann gilt: $s(X \cup \{v\}) = s_v(X \cup \{v\})$. Dieser Fall ist im zweiten inneren Minimum enthalten in dem $w = v$ gewählt wird: da $p(v, w) = 0$ bleibt lediglich noch $s_w(X \cup \{w\})$, also $s_v(X \cup \{v\})$.



Fall 2. v ist ein Blatt und der Trivialpfad endet in $w \in X$. In diesem Fall kommt das erste innere Minimum zum Tragen, der optimale Steinerbaum konstruiert sich aus einem minimalen Baum für X und dem kürzesten Weg von v nach w: $s(X \cup \{v\}) = p(v, w) + s(X)$.



Fall 3. v ist ein Blatt und der Trivialpfad endet in $w \notin X$. In diesem Fall hat w mindestens den Grad 3, das bedeutet der optimale Steinerbaum T besteht aus $X \cup \{w\}$ und dem kürzesten Pfad von v nach w, d.h. $s(X \cup \{v\}) = p(v, w) + s_w(X \cup \{w\})$.



3 Komplexität

Die Laufzeit des Algorithmus läßt sich am Einfachsten anhand des Pseudo Codes zeigen:

01: **for all** $v, w \in V$ **do**
02: *compute* $p(v, w)$;
03: **for all** $\{x, y\} \in Y$ **do**
04: $s(\{x, y\}) := p(x, y)$;
05: **for** $i := 1$ **to** $k - 1$ **do**
06: **for all** $X \subseteq Y$, $|X| = i$, **and all** $v \in V \setminus X$ **do**
07: $s_v(X \cup \{v\}) = \min\limits_{\emptyset \neq X' \subset X} \left\{ s(X' \cup \{v\}) + s((X \setminus X') \cup \{v\}) \right\}$
08: **for all** $X \subseteq Y$, $|X| = i$, **and all** $v \in V \setminus X$ **do**
09: $s(X \cup \{v\}) = \min \left\{ \min\limits_{w \in X} \{ p(v, w) + s(X) \}, \cdots \right\}$

Zur Ermittlung der Laufzeit betrachtet man nun die einzelnen Schleifen.

Die erste Schleife ermittelt die kürzesten Pfade zwischen den Knoten mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra. Dies wird für n Knoten durchgeführt, daher ergibt sich für diese Schleife die Laufzeit von $O(n^2 \log n + nm)$.

Für die erste Rekursion ergibt sich der Aufwand von $O(3^k n)$ wie folgt:

- Die Schleife in Zeile 05 wird k-mal ausgeführt.
- Die Schleife in Zeile 06 wird ebenfalls k-mal ausgeführt (**for all** $X \subseteq Y$, $|X| = i$).
- In jedem Schleifendurchlauf werden alle Menge X' der aktuellen Menge X betrachtet, dies ebenfalls k-mal ($\emptyset \neq X' \subset X$).

Aus dieser Analyse ergibt sich ein Aufwand von $O(3^k)$, fehlt noch der Faktor n. Dieser ergibt sich ebenfalls aus Zeile 06, die aussagt, dass die Mengen $X \subseteq Y$, $|X| = i$ für alle $v \in V \setminus X$ betrachtet werden. Da $|V \setminus X|$ potentiell sehr nahe an $|V|$ sein kann wird die Schleife näherungsweise n-mal ausgeführt.

Die Analyse für die 2. Rekursion stellt sich analog zur vorigen wie folgt dar.

- Die Schleife in Zeile 05 wird k-mal ausgeführt.
- Die Schleife in Zeile 08 wird ebenfalls k-mal ausgeführt (**for all** $X \subseteq Y$, $|X| = i$).
- Analog zu 06 wird auch in 08 die Schleife n-mal für alle $X \subseteq Y$, $|X| = i$ ausgeführt.

- Der Faktor n ergibt sich das zweite Mal aus der Bestimmung des zweiten inneren Minimums. Hier werden für alle $w \in V \backslash X$ näherungsweise n-mal die entsprechenden Kosten für den betrachteten Steinerbaum berechnet.

Zusammen ergibt sich damit die Laufzeit der 2. Rekursion von $O(2^k n^2)$.

Kombiniert man nun alle drei Teile des Algorithmus ergibt sich die Laufzeit des Dreyfus-Wagner-Algorithmus zu

$$O(3^k n + 2^k n^2 + n^2 \log n + nm)$$

4 alternativer Lösungsansatz

Grundidee des alternativen Lösungsansatzes ist die Aufteilung an mehreren Stellen. Während Dreyfus-Wagner lediglich maximal zwei Teilbäume betrachten, werden in dem neueren Lösungsansatz mehrere Teilbäume betrachtet.

Das Problem bleibt auch bei dieser Lösung NP-vollständig, die Laufzeit verbessert sich allerdings auf $O(2+\delta)^k * poly(n))$ für bel. $\delta > 0$.

Terminale werden in sogenannte (T,Z)-Regionen unterteilt, hierbei kann es notwendig sein zusätzliche Terminale hinzuzufügen. Desweiteren können mehrere Region zu sog. Confederations zusammengefasst werden inkl. der Möglichkeit diese Confederations wiederum zu vereinigen.

Um die Arbeitsweise des Algorithmus zu erklären sind zunächst einige Definitionen und Hilfskonstrukte notwendig.

Sei (G, l) ein Netzwerk, $Z \subseteq V[G]$ eine Menge von Terminalen, T ein opt. Steinerbaum für Z

- Eine (T, Z)-*Region* ist ein Teilbaum von T in dem jedes Terminal ein Blatt und jedes Blatt ein Terminal ist.
  Die Menge aller (T, Z)-Regionen wird mit $\mathcal{R}(T, Z)$ bezeichnet.

- Die zusammenhängende Vereinigung T' von (T, Z)-Regionen heißt (T, Z)-*Konföderation*.

- Z ist *q-granular* $\Leftrightarrow$ Es gibt einen opt. Steinerbaum T für Z in G mit $|V[R] \cap Z| \leq q$ für alle $R \in \mathcal{R}(T, Z)$.

Hier endete die Vorstellung des alternativen Lösungsansatzes für diese Session.