RWTH Aachen | **WS 2016**
Lehrgebiet Theoretische Informatik | Übungsblatt 3
Kuinke–Rossmanith–Sanchez | 11.11.2016

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 7

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das folgende Problem in polynomieller Zeit löst:

Eingabe: Ein gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit $c\colon E \to \mathbf{R}_0^+$
Frage: Ein Pfad von s nach t mit geringstem Gewicht w, so daß es keinen Pfad von s nach t mit Gewicht w gibt, der kürzer ist.

Beweisen Sie sowohl die Korrektheit als auch eine möglichst gute Laufzeitschranke ihrer Lösung.

Tutoraufgabe 8

Gegeben ist folgendes Problem:

Flat-Rate

Eingabe: Ein s-t-Netzwerk G, eine Kostenfunktion $w\colon E \to \mathbf{R}_0^+$, $a, b \in \mathbf{R}$
Frage: Gibt es einen Fluß von s nach t der Größe a mit „Flat-Rate-Kosten“ höchstens b?

Beweisen Sie, daß dieses Problem in P ist oder daß es NP-schwer ist.

Die „Flat-Rate-Kosten“ eines Flusses f sind $\sum_{e\in E, f(e)>0} w(e)$.

Tutoraufgabe 9

Die Produktionsaufträge $J_1, J_2, \ldots, J_n$ eines Unternehmens benötigen verschiedene Maschinen $M_1, M_2, \ldots, M_m$, wobei ein Auftrag auch mehrere Maschinen belegen kann. Ein Auftrag bringt natürlich einen gewissen Geldbetrag ein. Die Maschinen können entweder gekauft werden—diese Kosten entstehen dann nur einmal und jede weitere Nutzung ist Kostenfrei—oder gemietet werden. Letzteres kostet pro Auftrag einen gewissen Betrag (dieser Betrag variiert also von Auftrag zu Auftrag!).

Für so ein Szenario mit gegebenen Aufträgen, Maschinen und Kosten soll eine gewinnmaximierende Menge von Aufträgen mit entsprechender Zuteilung von Maschinen berechnet werden. Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um dieses Problem möglichst effizient zu lösen. Begründen Sie, wieso Ihr Verfahren korrekt funktioniert.

Benutzen Sie Ihr Verfahren, um eine optimale Lösung für das folgende Szenario zu berechnen. Die dritte Tabelle enthält die Mietkosten der Maschinen für die jeweiligen Aufträge, eine leere Zelle bedeutet, daß diese Maschine für diesen Auftrag nicht benötigt wird. Zum Beispiel kostet Auftrag J_1 auf der Maschine M_1 30 Geldeinheiten (vorausgesetzt, M_1 wurde nicht gekauft).

Auftrag	Zahlung
J_1	80
J_2	80
J_3	120

Maschine	Kaufpreis
M_1	60
M_2	80
M_3	100
M_4	30

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	30		50	
J_2		60	22	
J_3	30	30	30	30

Hausaufgabe 4 (8 Punkte)

Studierende können sich zu Seminaren anmelden, wobei sie drei Seminare mit den Prioritäten 3, 2 und 1 auswählen können. Jedes Seminar hat eine Teilnehmerobergrenze. Ziel ist es, die Studierenden so zu den Seminaren zuzuordnen, daß ihr Gesamtglücksgefühl maximiert wird (also die Summe der jeweiligen Prioritäten).

Überlegen Sie sich ein Verfahren, um so eine Zuordnung zu berechnen.

Hausaufgabe 5 (10 Punkte)

Sie haben die Zahlen $1, \ldots, n$. Sie möchten viele Paare aus dieser Menge auswählen, deren Summe eine *ungerade Quadratzahl* ist. Jede Zahl darf aber insgesamt nur einmal als Summand verwendet werden. (Die Summen selbst dürfen aber Duplikate aufweisen. Es gibt ja nur relativ wenige Quadratzahlen mit geeigneter Größe.)

Wieviele Paare kann ich so für $n = 100$ erhalten? Mehr als 50 geht sicher nicht, aber kann man die 50 erreichen? (Hinweis: Schreiben Sie ein Programm, das eine optimale Lösung berechnet.)