**RWTH Aachen** **WS 2016**
**Lehrgebiet Theoretische Informatik** Lösungsvorschlag 6
Kuinke–Rossmanith–Sanchez 30.11.2016

## Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

### Tutoraufgabe 16

Das LP läßt sich an obiger Tabelle sehr gut ablesen: Sei $u_1$ die Anzahl gekaufter Käsekuchen und $u_2$ die Anzahl gekaufter Schokokuchen, dann möchten wir die Kosten $1.20u_2 + 2.50u_2$ minimieren, so daß gilt:
$3u_1 + 4u_2 \geq 20$
$8u_1 + 2u_2 \geq 10$
$0u_1 + 4u_2 \geq 15$
In Normalform: Seien

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad b^T = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad c = (1.20, 2.50).$$

Dann ist das LP:

$$\min\{\, cu \mid A^T u \geq b, x \geq 0 \,\}$$

Wir lesen das zugehörige duale Maximierungsproblem auch direkt ab:

$$\max\{\, b^T x \mid Ax \leq c^T \,\}$$

In Worten: Maximiere $20x_1 + 10x_2 + 15x_3$ unter
$3x_1 + 8x_2 \leq 1.20$
$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2.50$
Wir können das duale Problem wie folgt interpretieren: Zunächst stellen wir fest, daß die Einheit der $x_i$ Euro sein muß, da 1.20 und 2.50 auch Euro-Beträge sind. Bei den $x_i$ handelt es sich also anscheinend um Preise für irgendetwas. Aus den Nebenbedingungen folgern wir, daß $x_1$ der Preis für Zucker ist, $x_2$ der Preis für Sahne und $x_3$ der Preis für Schokolade. Betrachten wir nun die Zielfunktion: Den Preisen dort werden die Beträge 20, 10 und 15 vorangestellt, welches die jeweiligen Mindestabnahmemengen des Studenten waren. Hierbei könnte es sich also um eine Art Mindestgewinn aus dem jeweiligen Produkt (Zucker, Sahne, Schokolade) handeln.
Tatsächlich könnten wir das duale Problem wie folgt interpretieren: Es stellt sich aus der Sicht eines Großhändlers für Backzutaten, der dem Bäcker die notwendigen Zutaten verkaufen möchte, wobei der Bäcker ihm vorher seine Preise und die Bedürfnisse des Studenten mitgeteilt hat.
Da der Großhändler eine Familie zu versorgen hat, möchte er konservativ kalkulieren und seine *garantierten* Einnahmen durch Verkäufe an den Bäcker maximieren – diese ergeben sich zwangsläufig aus der *Mindestabnahme* des Studenten: Beispielsweise kann der Großhändler fest damit kalkulieren, daß der Bäcker ihm mindestens 20 Einheiten Zucker abnehmen wird. Da der Bäcker auf der anderen Seite Käsekuchen für $1,20$ EUR und Schokoladenkuchen für $2,50$ EUR pro Stück verkauft, dürfen die Kosten für die Zutaten eines Kuchens nicht Verkaufspreis an den Studenten übersteigen, sonst macht der Bäcker Verlust. Entsprechend erklären sich die zwei Nebenbedingungen des dualen Problems.

**Tutoraufgabe 17**
Wir lösen das duale Problem durch den Simplex-Algorithmus:

| | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | -1.00 | -1.00 | -1.00 | -1.00 | -1.00 | -1.00 | 0.00 |
| x1 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x2 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| x3 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x4 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x3 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1.00 | -1.00 | -1.00 | 0.00 | -1.00 | -1.00 | 1.00 |
| x1 | -1.00 | 1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | -0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| y1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x4 | -0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| x5 | -0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x3 | x1 | y3 | y4 | y5 | y6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -1.00 | -1.00 | -1.00 | 1.00 |
| y2 | -1.00 | 1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | -0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| y1 | 1.00 | -0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x4 | 1.00 | -1.00 | -1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| x5 | 0.00 | -0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x3 | x1 | y3 | x5 | y5 | y6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 2.00 |
| y2 | -1.00 | 1.00 | 2.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| x2 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| y1 | 1.00 | 0.00 | -1.00 | -1.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 |
| x4 | 1.00 | -1.00 | -2.00 | -1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 |
| y4 | 0.00 | -0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x3 | x1 | y3 | x5 | x4 | y6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | 2.00 |
| y2 | -1.00 | 1.00 | 2.00 | 1.00 | -0.00 | 1.00 | 1.00 |
| x2 | -1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 |
| y1 | 1.00 | 0.00 | -1.00 | -1.00 | -0.00 | -1.00 | 0.00 |
| y5 | 1.00 | -1.00 | -2.00 | -1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 |
| y4 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | -0.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x3 | x1 | x2 | x5 | x4 | y6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |
| y2 | 1.00 | -1.00 | -2.00 | 1.00 | 2.00 | -1.00 | 1.00 |
| y3 | -1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 |
| y1 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | -1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 |
| y5 | -1.00 | 1.00 | 2.00 | -1.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 |
| y4 | 1.00 | -1.00 | -1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |

In bipartiten Graphen hat ein maximales Matching die gleiche Größe wie ein minimales Vertex Cover, darum gibt es immer auch eine ganzzahlige optimale Lösung, die in obigem Fall auch gefunden wurde.

Dieses muß bei beliebigen Graphen nicht unbedingt der Fall sein, wie folgendes Beispiel des $C_3$ zeigt (wieder unter Verwendung des dualen Problems für das Matchingproblem):

| | y1 | y2 | y3 | |
|---|---|---|---|---|
| z | -1.00 | -1.00 | -1.00 | 0.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| x2 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| x3 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x2 | y2 | y3 | |
|---|---|---|---|---|
| z | 1.00 | 0.00 | -1.00 | 1.00 |
| x1 | -1.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 |
| y1 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| x3 | -0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

| | x2 | y2 | x1 | |
|---|---|---|---|---|
| z | 0.00 | -1.00 | 1.00 | 1.00 |
| y3 | -1.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 |
| y1 | 1.00 | 1.00 | -0.00 | 1.00 |

```
 x3      1.00      2.00     -1.00      1.00

         x2        x3        x1
  z      0.50      0.50      0.50      1.50
 y3     -0.50      0.50      0.50      0.50
 y1      0.50     -0.50      0.50      0.50
 y2      0.50      0.50     -0.50      0.50
```

**Hausaufgabe 10 (10 Punkte)**
Es ist leicht zu sehen, daß $y = 2$ und $x = 3$ eine optimale Lösung der Größe 5 ist. Zum Beweis der Optimalität zeigen wir nun, daß 5 auch eine Lösung des dualen Problems ist. Dieses ist: Minimiere $2z_1 + 3z_2 + 2z_3$ unter $z_2 + z_3 = 1$, $z_1 - z_3 = 1$ und $z_i \geq 0$.
Wir lösen und das folgende Gleichungssystem mit der zusätzlichen Bedingung, daß eine Lösung des dualen Problems genau 5 sein soll.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \text{-1} & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

und erhalten als einzige Lösung $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 0$. Da diese glücklicherweise $z_i \geq 0$ erfüllt, haben wir somit eine Lösung für das duale Problem mit Kosten 5 gefunden.

**Hausaufgabe 11 (10 Punkte)**
Ein direkter Beweis ist möglich, es ist aber einfacher Farkas Lemma A zu benutzen.
Dazu setzen wir $A' = (A, -A, I)$, wobei $I$ die Einheitsmatrix ist. Dann erhalten wir aus Farkas Lemma A, daß genau eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:

1. Es gibt ein $x$ mit $A'x = b$, $x \geq 0$.
2. Es gibt ein $y$ mit $A'^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.

Wir formen dies um und erhalten

1. Es existiert ein $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit $x \geq 0$ und
$$(A, -A, I)x = b \Leftrightarrow Ax_1 - Ax_2 + Ix_3 = b \Leftrightarrow A(x_1 - x_2) + x_3 = b.$$
$\Leftrightarrow$ Es existieren $x', x_3$, mit $x_3 \geq 0$ und $Ax' + x_3 = b$.
$\Leftrightarrow$ Es existiert $x'$ mit $Ax' \leq b$.
2. Es gibt ein $y$ mit $(A, -A, I)^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.
$\Leftrightarrow$ Es existiert ein $y$ mit $Ay \geq 0$, $-Ay \geq 0$, $Iy \geq 0$, $b^T y < 0$.
$\Leftrightarrow$ Es existiert ein $y \geq 0$ mit $Ay = 0$, $b^T y < 0$.