Lineares Programmieren

Eingabe:

Eine Menge von linearen Ungleichungen $S_i\colon \sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j \leq b_i$.

Eine lineare Optimierungsfunktion $f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$.

Problem:

Gesucht ist eine Belegung $x \geq 0$, für die alle Ungleichungen erfüllt sind und dir $f(x)$ maximiert.

Beispiel

Gegeben ein s-t-Netzwerk $G = (V, E)$.

Maximiere $\sum_{v \in V} f(s, v)$ unter den Bedingungen

- $f(u, v) = -f(u, v)$ für alle $(u, v) \in E$,
- $\sum_{u \in V} f(v, u) = 0$ für alle $u \in V - \{s, t\}$,
- $f(u, v) \leq c(u, v)$.

$\Rightarrow$ Lineares Programm für das Maximale-Fluß-Problem.

Modellierung als Lineares Programm

Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leq b$ und $x \geq 0$.

Dabei ist $x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$ und $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Viele abweichende Probleme lassen sich in diese Form bringen:

- Minimiere $c^T x \quad \mapsto \quad$ Maximiere $-c^T x$
- $a^T x \geq b \quad \mapsto \quad -a^T x \leq -b$
- Unbeschränktes $x_i \quad \mapsto \quad x_i' - x_i''$ mit $x_i', x_i'' \geq 0$

Beispiel: Wassermischen

Wir brauchen 100 Liter Wasser mit 60°C und nehmen

- x_1 Liter mit 20°C zu 1 EUR/l
- x_2 Liter mit 50°C zu 2 EUR/l
- x_3 Liter mit 100°C zu 3 EUR/l

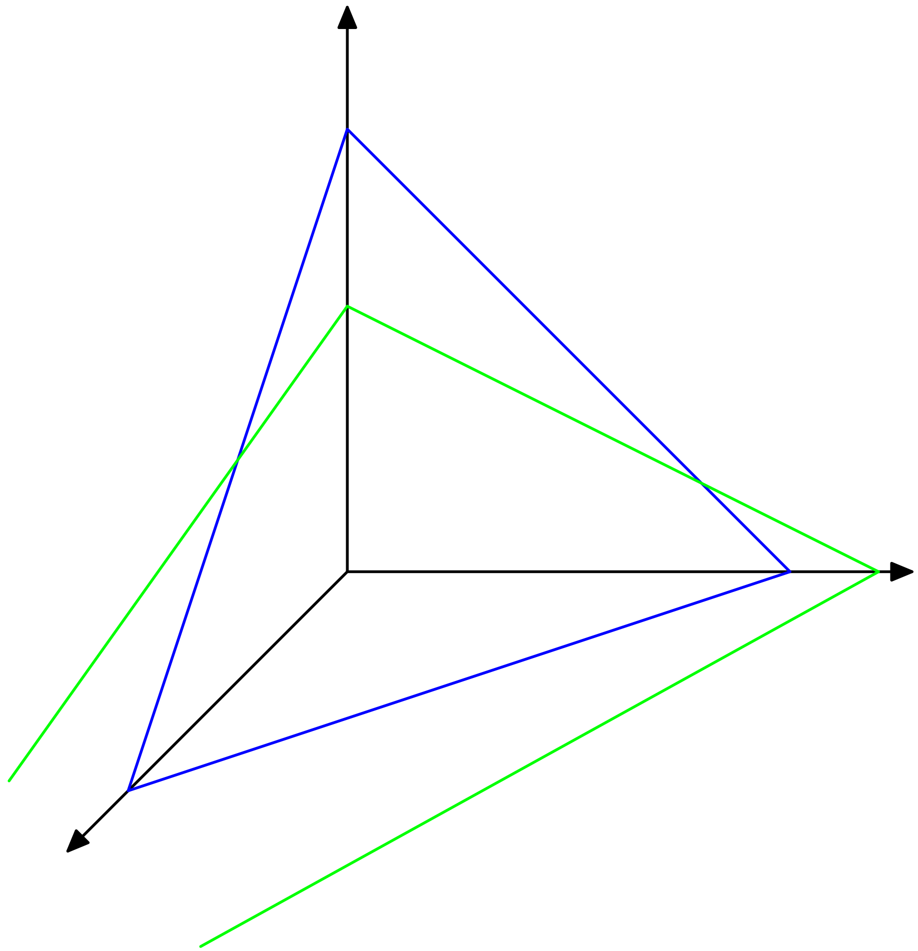
Minimiere $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ (die Kosten) unter

- $x_1 + x_2 + x_3 = 100$
- $20x_1 + 50x_2 + 100x_3 = 6000$

Beispiel: Wassermischen

$x_1 + x_2 + x_3 = 100$

$20x_1 + 50x_2 + 100x_3 = 6000$



Kanonische und Normalform

Kanonische Form: Minimiere $c^T x$ unter $Ax \geq b$

Normalform: Minimiere $c^T x$ unter $Ax = b$, $x \geq 0$

Umwandlung Kanonisch $\rightarrow$ Normalform:

Minimiere $c_T x^+ - c^T x^-$ unter $Ax^+ - Ax^- - Is = b$, $x^+, x^-, s \geq 0$

Umwandlung Normalform $\rightarrow$ Kanonisch:

Minimiere $c^T x$ unter $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 100 \\
20x_1 & + & 50x_2 & + & 100x_3 & = & 6000 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 100 \\
- & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -100 \\
 & 20x_1 & + & 50x_2 & + & 100x_3 & \geq & 6000 \\
- & 20x_1 & - & 50x_2 & - & 100x_3 & \geq & -6000 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & - & 5x_2 & \geq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = 5 \\ x_1 & - & 5x_2 & & & - & x_4 & & & = 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & & & - & x_5 & = 5 \\ & & & & & & & & x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}$$

x_3, x_4, x_5 sind *Schlupfvariablen.*

Ist dies bereits Normalform?

Geometrie des Linearen Programmierens

Sei $P = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \subseteq \mathbf{R}^n$.

Definition

x ist eine *Ecke* von P, wenn es kein $y \neq 0$ mit $x + y \in P$ und $x - y \in P$ gibt.