RWTH Aachen **SS 2010**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 6
Kneis—Langer—Rossmanith 02.06.2010

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 14

Ein Student möchte für eine Prüfung lernen und daher seinen Blutzuckerspiegel anheben. Er beschließt, in eine Bäckerei zu gehen und Kuchen zu kaufen. Zur Auswahl stehen Käse- und Schokokuchen, wobei jeder Käsekuchen drei Einheiten Zucker und acht Einheiten Sahne und jeder Schokokuchen vier Einheiten Zucker, zwei Einheiten Sahne und vier Einheiten Schokolade enthält. Der Student ist der Ansicht, daß er wenigstens 20 Einheiten Zucker, 10 Einheiten Sahne und 15 Einheiten Schokolade zu sich nehmen sollte.

In der Bäckerei kostet ein solcher Käsekuchen 1,20 EUR, ein Schokokuchen 2,50 EUR (dafür schmeckt dieser aber auch besser). Der Bäcker hat Verständnis für die notorische Geldnot des Studenten und bietet ihm an, Kuchen in beliebigen Teilmengen abzunehmen, damit der Student möglichst günstig einkaufen kann.

Zusammengefasst ergibt sich folgende Tabelle:

	Zucker	Sahne	Schokolade	Kosten
Käsekuchen	3	8	0	1,20
Schokoladenkuchen	4	2	4	2,50
Mindestmenge	20	10	15	

Modellieren Sie dieses Problem aus Sicht des Studenten als ein LP.

Berechnen Sie danach das duale Problem und versuchen Sie ein Modell aus der realen Welt zu finden, das diesem dualen Problem entspricht.

Ansatz:

Das LP läßt sich an obiger Tabelle sehr gut ablesen: Sei u_1 die Anzahl gekaufter Käsekuchen und u_2 die Anzahl gekaufter Schokokuchen, dann möchten wir die Kosten $1.20u_2 + 2.50u_2$ minimieren, so daß gilt:

$3u_1 + 4u_2 \geq 20$
$8u_1 + 2u_2 \geq 10$
$0u_1 + 4u_2 \geq 15$

In Normalform: Seien

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad b^T = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad c = (1.20, 2.50).$$

Dann ist das LP:

$$\min\{\, cu \mid A^T u \geq b, x \geq 0 \,\}$$

Wir lesen das zugehörige duale Maximierungsproblem auch direkt ab:

$$\max\{\, b^T x \mid Ax \leq c^T \,\}$$

In Worten: Maximiere $20x_1 + 10x_2 + 15x_3$ unter

$3x_1 + 8x_2 \leq 1.20$

$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2.50$

Wir können das duale Problem wie folgt interpretieren: Zunächst stellen wir fest, daß die Einheit der x_i Euro sein muß, da 1.20 und 2.50 auch Euro-Beträge sind. Bei den x_i handelt es sich also anscheinend um Preise für irgendetwas. Aus den Nebenbedingungen folgern wir, daß x_1 der Preis für Zucker ist, x_2 der Preis für Sahne und x_3 der Preis für Schokolade. Betrachten wir nun die Zielfunktion: Den Preisen dort werden die Beträge 20, 10 und 15 vorangestellt, welches die jeweiligen Mindestabnahmemengen des Studenten waren. Hierbei könnte es sich also um eine Art Mindestgewinn aus dem jeweiligen Produkt (Zucker, Sahne, Schokolade) handeln.

Tatsächlich könnten wir das duale Problem wie folgt interpretieren: Es stellt sich aus der Sicht eines Großhändlers für Backzutaten, der dem Bäcker die notwendigen Zutaten verkaufen möchte, wobei der Bäcker ihm vorher seine Preise und die Bedürfnisse des Studenten mitgeteilt hat.

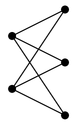
Da der Großhändler eine Familie zu versorgen hat, möchte er konservativ kalkulieren und seine *garantierten* Einnahmen durch Verkäufe an den Bäcker maximieren – diese ergeben sich zwangsläufig aus der *Mindestabnahme* des Studenten: Beispielsweise kann der Großhändler fest damit kalkulieren, daß der Bäcker ihm mindestens 20 Einheiten Zucker abnehmen wird. Da der Bäcker auf der anderen Seite Käsekuchen für $1,20$ EUR und Schokoladenkuchen für $2,50$ EUR pro Stück verkauft, dürfen die Kosten für die Zutaten eines Kuchens nicht Verkaufspreis an den Studenten übersteigen, sonst macht der Bäcker Verlust. Entsprechend erklären sich die zwei Nebenbedingungen des dualen Problems.

Tutoraufgabe 15

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Betrachten Sie das folgende zugehörige LP:
Minimiere $\sum_{v \in V} x_v$ unter

$$\begin{aligned} x_u + x_v &\geq 1 \qquad \text{for all } \{u, v\} \in E \\ x_v &\geq 0 \qquad \text{for all } v \in V \end{aligned}$$

Ist dieses eine zulässige Formulieren für das bekannte VERTEX COVER-Problem?
Bilden Sie das duale Problem zu obigem LP und interpretieren Sie es.
Lösen Sie dann obiges LP für folgenden bipartiten Graphen:



Ansatz:
Wir lösen das duale Problem mit Simplex:

	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
z	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
x1	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
x2	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00
x3	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
x4	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
x5	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00

	x3	y2	y3	y4	y5	y6	
z	1.00	-1.00	-1.00	0.00	-1.00	-1.00	1.00
x1	-1.00	1.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
x2	-0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00
y1	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
x4	-0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
x5	-0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00

	x3	x1	y3	y4	y5	y6	
z	0.00	1.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	1.00
y2	-1.00	1.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
x2	0.00	-0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00
y1	1.00	-0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
x4	1.00	-1.00	-1.00	1.00	1.00	0.00	1.00
x5	0.00	-0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00

	x3	x1	y3	x5	y5	y6	
z	0.00	1.00	1.00	1.00	-1.00	0.00	2.00
y2	-1.00	1.00	2.00	1.00	0.00	1.00	1.00
x2	0.00	0.00	-1.00	-1.00	1.00	0.00	0.00
y1	1.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00	-1.00	0.00
x4	1.00	-1.00	-2.00	-1.00	1.00	-1.00	0.00
y4	0.00	-0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00

	x3	x1	y3	x5	x4	y6	
z	1.00	0.00	-1.00	0.00	1.00	-1.00	2.00
y2	-1.00	1.00	2.00	1.00	-0.00	1.00	1.00
x2	-1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	1.00	0.00
y1	1.00	0.00	-1.00	-1.00	-0.00	-1.00	0.00
y5	1.00	-1.00	-2.00	-1.00	1.00	-1.00	0.00
y4	0.00	0.00	1.00	1.00	-0.00	1.00	1.00

	x3	x1	x2	x5	x4	y6	
z	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	2.00
y2	1.00	-1.00	-2.00	1.00	2.00	-1.00	1.00
y3	-1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	1.00	0.00
y1	0.00	1.00	1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00
y5	-1.00	1.00	2.00	-1.00	-1.00	1.00	0.00
y4	1.00	-1.00	-1.00	1.00	1.00	0.00	1.00

In bipartiten Graphen hat ein maximales Matching die gleiche Größe wie ein minimales Vertex Cover, darum gibt es immer auch eine ganzzahlige optimale Lösung, die in obigem Fall auch gefunden wurde.

Dieses muß bei beliebigen Graphen nicht unbedingt der Fall sein, wie folgendes Beispiel des C_3 zeigt (wieder unter Verwendung des dualen Problems für das Matchingproblem):

	y1	y2	y3	
z	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
x1	1.00	0.00	1.00	1.00
x2	1.00	1.00	0.00	1.00
x3	0.00	1.00	1.00	1.00

	x2	y2	y3	
z	1.00	0.00	-1.00	1.00
x1	-1.00	-1.00	1.00	0.00
y1	1.00	1.00	0.00	1.00
x3	-0.00	1.00	1.00	1.00

	x2	y2	x1	
z	0.00	-1.00	1.00	1.00
y3	-1.00	-1.00	1.00	0.00
y1	1.00	1.00	-0.00	1.00
x3	1.00	2.00	-1.00	1.00

	x2	x3	x1	
z	0.50	0.50	0.50	1.50
y3	-0.50	0.50	0.50	0.50
y1	0.50	-0.50	0.50	0.50
y2	0.50	0.50	-0.50	0.50

Hausaufgabe 12 (10 Punkte)
Betrachten Sie das folgende LP: Maximiere $x + y$ unter $y \leq 2$, $x \leq 3$ und $y - x \geq -2$. Lösen Sie es mit geeigneten Mitteln und geben Sie einen einfachen Beweis an, daß Ihre Lösung korrekt ist.
Beachten Sie, daß etwa eine Anwendung des Simplex-Algorithmus oder eine graphische Lösung allein kein Beweis für die Korrektheit sind, da Sie sich verrechnet haben könnten...

Lösung:
Es ist leich zu sehen, daß $y = 2$ und $x = 3$ eine optimale Lösung der Größe 5 ist. Zum Beweis der Optimalität zeigen wir nun, daß 5 auch eine Lösung des dualen Problems ist. Dieses ist: Minimiere $2z_1 + 3z_2 + 2z_3$ unter $z_2 + z_3 = 1$, $z_1 - z_3 = 1$ und $z_i \geq 0$.
Wir lösen und das folgende Gleichungssystem mit der zusätzlichen Bedingung, daß eine Lösung des dualen Problems genau 5 sein soll.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

und erhalten als einzige Lösung $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 0$. Da diese glücklicherweise $z_i \geq 0$ erfüllt, haben wir somit eine Lösung für das duale Problem mit Kosten 5 gefunden.

Hausaufgabe 13 (10 Punkte)
Beweisen Sie Farkas Lemma B:
Sei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann ist genau eine dieser Aussagen wahr:

1. Es gibt ein $x \in \mathbf{R}^n$ mit $Ax \leq b$.
2. Es gibt ein $y \geq 0$ mit $A^T y = 0$, $b^T y < 0$.

Lösung:
Ein direkter Beweis ist möglich, es ist aber einfacher Farkas, Lemma A zu benutzen. Dazu setzen wir $A' = (A, -A, I)$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Dann erhalten wir aus Farkas Lemma A, daß genau eine der beiden folgenden Aussagen wahr ist:

1. Es gibt ein x mit $A'x = b$, $x \geq 0$.
2. Es gibt ein y mit $A'^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.

Wir formen dies um und erhalten

1. Es existiert ein $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit $x \geq 0$ und
$$(A, -A, I)x = b \Leftrightarrow Ax_1 - Ax_2 + Ix_3 = b \Leftrightarrow A(x_1 - x_2) + x_3 = b.$$
$\Leftrightarrow$ Es existieren x', x_3, mit $x_3 \geq 0$ und $Ax' + x_3 = b$.
$\Leftrightarrow$ Es existiert x' mit $Ax' \leq b$.
2. Es gibt ein y mit $(A, -A, I)^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.
$\Leftrightarrow$ Es existiert ein y mit $Ay \geq 0$, $-Ay \geq 0$, $Iy \geq 0$, $b^T y < 0$.
$\Leftrightarrow$ Es existiert ein $y \geq 0$ mit $Ay = 0$, $b^T y < 0$.