RWTH Aachen
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Kneis—Langer—Rossmanith

SS 2010
Übungsblatt 4
5.05.2010

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 10

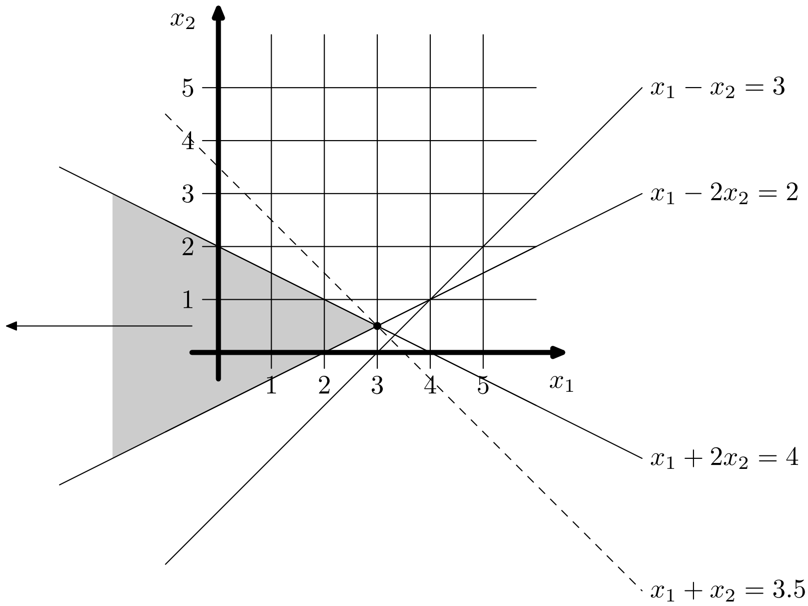
Gegeben sind folgende lineare Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Jede der Bedingungen schränkt die Lösungen auf eine Halbebene ein. Zeichnen Sie die drei Halbebenen und ihre Schnittmenge in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

Finden Sie jetzt optimale Lösungen, die die Zielfunktionen x_1, x_2 und x_1+x_2 maximieren.

Ansatz:



Der Lösungsraum ist in grau dargestellt und ist unbeschränkt (er ist nach links offen).

- Für $\max x_1$: visuelle Lösung bei $(3, 0.5)$.
- Für $\max x_2$ gibt es keine optimale Lösung.
- Eine Gerade der Form $c = x_1 + x_2$ ist eingezeichnet. Mit $c = 3.5$ finden wir das maximale c, so daß der Schnitt der Geraden mit dem Lösungsraum nicht leer ist, die optimale Lösung liegt also auch bei $(3, 0.5)$.

Tutoraufgabe 11
Betrachten Sie wieder das Wassermischproblem aus der Vorlesung, welches wir folgendermaßen als LP modellieren konnten:
Minimiere $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ (die Kosten) unter

- $x_1 + x_2 + x_3 = 100$
- $20x_1 + 50x_2 + 100x_3 = 6000$

Sodann:

1. Überführen Sie obiges LP in die Normalform.
2. Starten Sie mit $x = (0, 80, 20)$ und finden Sie eine Ecke des Lösungsraums, für die die Zielfunktion nicht schlechter ist als für x. Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung.
3. Wiederholen Sie das Verfahren für eine Lösung mit $x_2 = 20$.

Ansatz:
Seien $c = (1, 2, 3)$, $b = \begin{pmatrix} 100 \\ 6000 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 50 & 100 \end{pmatrix}$.
Dann ist die Normalform des obigen LPs: Minimiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geq 0$.
Sei $P = \{\, x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\} \subseteq \mathbf{R}^3$ der Lösungsraum des LPs. Im folgenden möchten wir Ecken dieses Lösungsraums finden.
Wenn ein $x \in P$ *keine* Ecke ist, dann existiert nach Definition ein $y \in R^3$ mit $y \neq 0$, $x + y \in P$ und $x - y \in P$. Für dieses y gilt also insbesondere $A(x + y) = b$ und somit $Ay = 0$, womit wir ein notwendiges Kriterium für y gefunden haben.
Wir lösen also zunächst dieses Gleichungssystem mit Standardmitteln und erhalten, daß jedes solche y für ein geeignetes λ von der Form

$$y = \lambda \begin{pmatrix} 5/3 \\ -8/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sein muß.
Betrachten wir nun $x = (0, 80, 20)$, dann sehen wir direkt, daß x eine Ecke ist: Für jedes y in obiger Form ist die erste Komponente in entweder $x + y$ oder $x - y$ negativ und somit entweder $x + y \notin P$ oder $x - y \notin P$.
Betrachten wir nun eine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_2 = 20$. Wir lösen zunächst die Gleichungen und erhalten $x = (37.5, 20, 42.5)$.
Wähle $y = (5, -8, 3)$. Dann ist wie gefordert $0 \geq c^T y = 5 - 16 + 9 = -2$. Damit können wir von x aus in Richtung y durch den Lösungsraum „wandern“, ohne daß die Zielfunktion schlechter wird. Wir müssen nur noch feststellen, wie weit wir gehen können, bis wir den Rand des Lösungsraums erreicht haben.
Wegen $c^T y \neq 0$ wählen wir jetzt entsprechend des konstruktiven Beweises aus der Vorlesung

$$\lambda' = \min\{\, -\frac{x_j}{y_j} \mid y_j < 0 \,\} = -x_2/y_2 = 20/8 = 2.5.$$

Setze $x' := x + 2.5y = (50, 0, 50)$. Dann ist x' aus den gleichen Gründen wie oben eine Ecke, und die Zielfunktion hat sich sogar verbessert.

Hausaufgabe 7 (10 Punkte)

Folgende Aufgabe stellt sich täglich den Logistikdienstleistern der Region: Es müssen jeweils 20 LKW mit Printen von Aachen nach Düsseldorf und Köln geschafft werden. Von Köln aus müssen 100 LKW Kölsch nach Aachen und 10 LKW nach Düsseldorf transportiert werden. Schließlich benötigt man in Aachen 80 LKW und in Köln 20 LKW feinsten Alts aus Düsseldorf.

All das geschieht über drei Straßen, die die drei Städtepaare verbinden. Dabei kostet ein LKW-Transport von Aachen nach Köln oder andersherum 4 Euro, von Düsseldorf nach Aachen oder retour 5 Euro, und für die gefährliche Strecke zwischen Köln und Düsseldorf muß man schon mit 10 Euro pro LKW rechnen. Zudem können auf jeder Straße pro Richtung und Tag nur 100 LKW fahren.

Wie kann man den Konsumwahnsinn am billigsten befriedigen? Modellieren Sie bitte den Logistikalbtraum als LP! Erläutern Sie dabei jede Gleichung/Ungleichung, die sie verwenden!

Lösen Sie sodann das LP, beispielsweise mit Hilfe eines entsprechenden Programms wie auf `http://algos.inesc.pt/lp/`.

Ansatz:

```
min: 4xkka+4xaka+4xpak+4xaak +
     5xada+5xkda+5xpad+5xkad +
     10xpkd+10xpdk+10xadk+10xkkd;

kap=100;

xkka+xaka <= kap;
xkda+xada <= kap;

xpak+xaak <= kap;
xpdk+xadk <= kap;

xpad+xkad <= kap;
xpkd+xkkd <= kap;

xkka+xkkd = 110;
xpak+xpad = 40;
xada+xadk = 100;

xkka+xkda-xkad = 100;
xada+xaka-xaak = 80;

xkkd+xkad-xkda = 10;
xpad+xpkd-xdk = 20;

xadk+xaak-xaka = 20;
xpak+xpdk-xpkd = 20;
```

Die Lösung ergibt: Die Printen und das Kölsch werden direkt verschickt, und das Altbier komplett über Aachen. Das kostet dann alles in allem $20 * 4 + 20 * 5 + 20 * 4 + 100 * 5 + 4 * 100 + 10 * 10 = 80 + 100 + 80 + 500 + 400 + 100 = 1260$ Euro.

Hausaufgabe 8 (5 Punkte)
Nach umfangreichen statistischen Untersuchungen hat sich herausgestellt, daß sich das durchschnittliche Einstiegsgehalt in Euro nach dem Informatikstudium etwa nach folgender Formel berechnen läßt:

$$120000 - N_M \cdot 20000 - N_P \cdot 2000$$

Dabei ist $N_M \in [1.0, 5.0]$ die Mathematiknote und $N_P \in [1.0, 5.0]$ die Note in „Programmierung“.
Wenn x_M die Anzahl der Stunden pro Woche ist, in welchen Mathematik gelernt wurde, und x_P die entsprechende Anzahl für Programmierung ist, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_M &= \max\{5.0 - \tfrac{1}{2}x_M, 1.0\} \\ N_P &= \max\{5.0 - 2x_P, 1.0\} \end{aligned}$$

Pro Woche werden genau G Stunden gelernt. Natürlich soll jetzt eine optimale Belegung von x_M und x_P gefunden werden, die das Anfangsgehalt maximiert.
Leider ist dieses Optimierungsproblem noch kein lineares Programm.

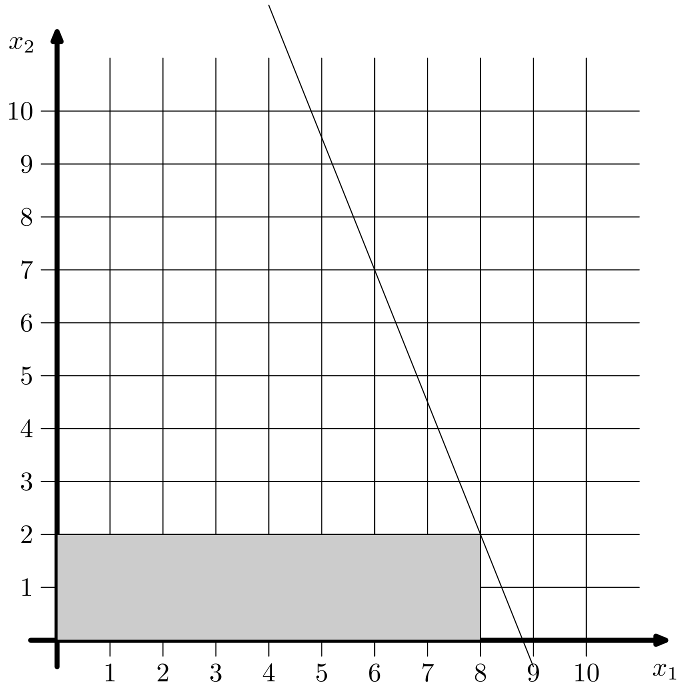
- Finden Sie ein lineares Programm, aus dessen Lösung sich die Lösung dieses Problems ablesen läßt.
- Lösen Sie das lineare Programm graphisch für $G = 20$.

Ansatz:
Bei der Formulierung als LP sind offenbar die Bedingungen

$$\begin{aligned} N_M &= \max\{5.0 - \tfrac{1}{2}x_M, 1.0\} \\ N_P &= \max\{5.0 - 2x_P, 1.0\} \end{aligned}$$

problematisch, die man nicht einfach in ein LP übertragen kann. Auch dürfen formal keine Konstanten in der Zielfunktion auftreten.
Wir behelfen uns folgendermaßen: Zunächst stellen wir fest, daß Werte von $x_M > 8$ und $x_P > 2$ keine Auswirkung auf das Endgehalt haben werden, selbst wenn man mehr lernen sollte. Fügen wir dem LP zwei Bedingungen $x_M \leq 8$ und $x_P \leq 2$ hinzu, können wir aber einfach $N_M = 5.0 - 0.5x_M$ und $N_P = 5.0 - 2x_P$ einsetzen. Dieses ergibt zunächst die neue Zielfunktion $c := 10000 + 10000x_M + 4000x_P$, die es zu maximieren gilt. Um nun noch die Konstante 10000 loszuwerden, betrachten wir $c' := c - 10000$, die es nun zu maximieren gilt. Dieses ergibt das folgende LP:
Maximiere $c' = 10000x_M + 4000x_P$ unter
$x_P, x_M \geq 0$
$x_M \leq 8$
$x_P \leq 2$

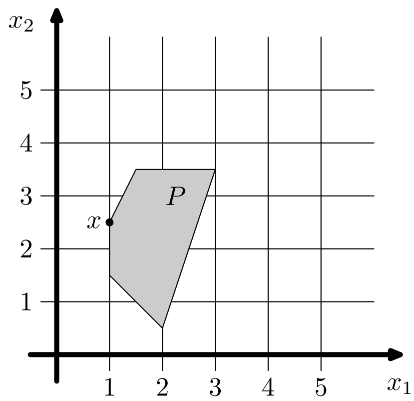
Aus einer optimalen Lösung c' erhalten wir nun einfach die optimale Lösung $c = c' + 10000$ für unser gesuchtes Problem. Lösung wir das Problem nun graphisch (mit $x_1 := x_M$ und $x_2 := x_P$):



Dieses LP und die graphische Lösung verraten uns somit, daß es also optimal ist, wenigstens acht Stunden pro Woche Mathematik und zwei Stunden pro Woche Programmierung zu lernen. Wie man die restlichen 10 Stunden (für $G = 20$) verbringt, scheint für das Einstiegsgehalt irrelevant allerdings zu sein.

Hausaufgabe 9 (5 Punkte)

Geben Sie ein LP in kanonischer Form an, welches den folgendermaßen dargestellten Lösungsraum P und im eingezeichneten Punkt x seine einzige optimale Lösung hat.



Ansatz:

Als Gleichungen erhalten wir.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 0.5 \\ x_2 &\leq 3.5 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 5.5 \\ x_1 + x_2 &\geq 2.5 \end{aligned}$$

Als Basis für die Zielfunktion wählen wir eine Gerade, deren Orthogonale den Lösungsraum nur im gewünschten Punkt berührt, z.B. die Zielfunktion $\min 4x_1 - x_2$.
In der unten aufgeführten Grafik sind zwei Geraden der Form $x_2 = 4x_1 + c$ eingezeichnet. Entlang jeder solcher Geraden bleibt der Funktionswert von $4x_1 - x_2$ konstant gleich $-c$. Wenn man nun $-c = 4x_1 - x_2$ minimieren soll, ist es klar, daß man die Geraden so weit wie möglich parallel zur x_2-Achse nach *oben* verschieben muß.