RWTH Aachen **SS 2010**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 1
Kneis—Langer—Rossmanith 21.04.2010

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Rest von Lemma A aus der Vorlesung:

3) $\forall X, Y, Z \subseteq V \; f(X \dot\cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$,

4) $\forall X, Y, Z \subseteq V \; f(X, Y \dot\cup Z) = f(X, Y) + f(X, Z)$.

Lösung:
Für Aufgabenteil 3 (Aufgabenteil 4 läßt sich analog bewältigen):

$$f(X \cup Y, Z) = \sum_{v \in X \cup Y} \sum_{z \in Z} f(v, z) =$$
$$= \sum_{x \in X} \sum_{z \in Z} f(x, z) + \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} f(y, z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$$

Tutoraufgabe 2

Es sei $A \dot\cup B \dot\cup C = V$ und $s \in A$, $t \in C$. Beweisen Sie:

$$f(A, B) = f(B, C).$$

Lösung:

$$f(A, B) = f(V, B) - f(B \cup C, B) = f(B, B \cup C) = f(B, B) + f(B, C) = f(B, C)$$

Tutoraufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung:

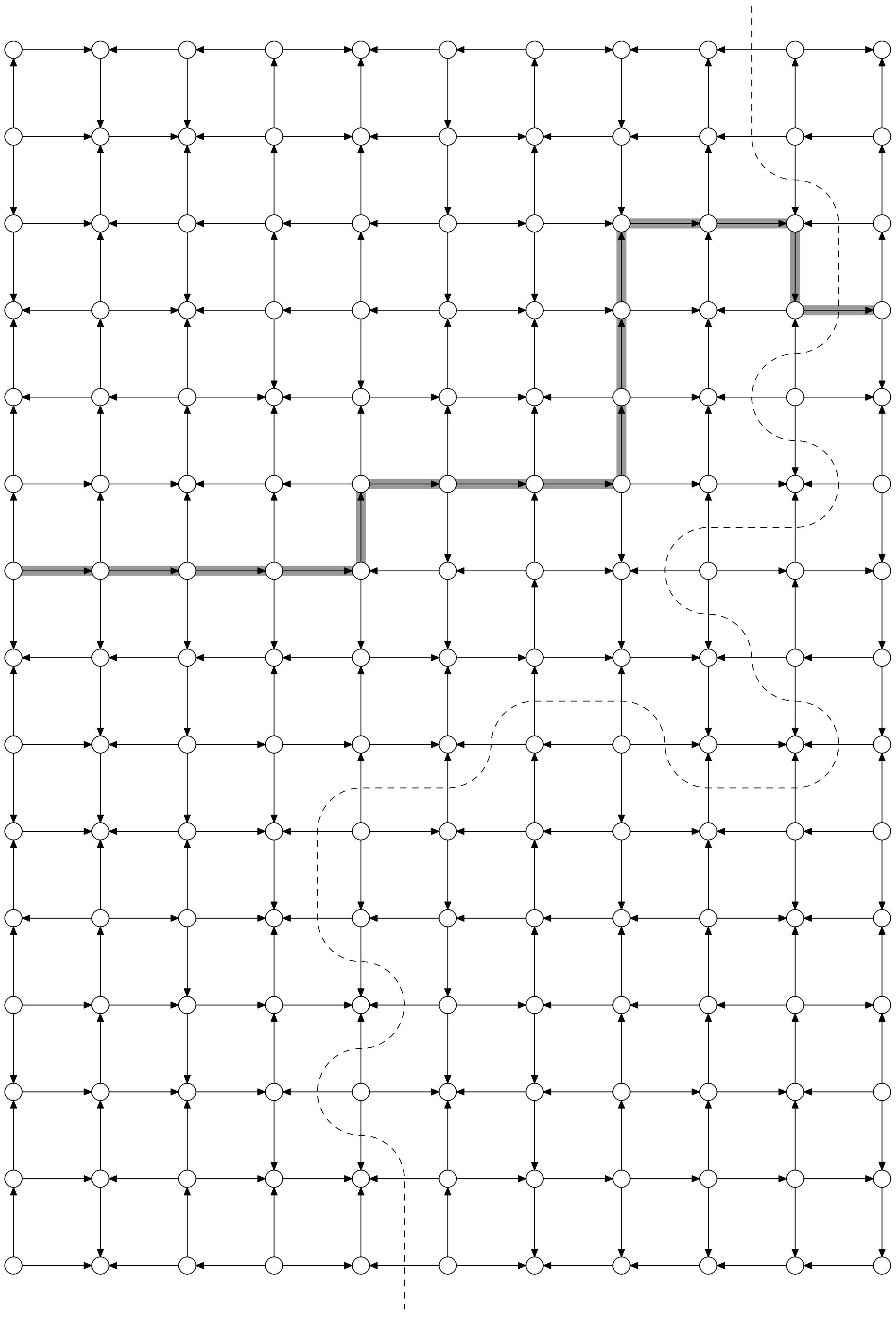
> *In einem s-t-Netzwerk $G = (V, E)$ läßt sich immer ein maximaler Fluß mit Hilfe von nur $|E|$ augmentierenden Pfaden finden. Manchmal geht es nicht mit weniger, aber man braucht nie mehr.*

Falls die Behauptung stimmt, dann könnte die Ford–Fulkerson–Methode ziemlich schnell sein — wenn sie nur die richtigen augmentierenden Pfade wählte.

Ansatz:
Sei N ein Netzwerk mit maximalen Fluß f. Wähle im von f induzierten Graphen einen Pfad P von s nach t. Über diesen fließt $f(P)$, und da f maximal ist, gibt es eine Kante $e \in P$ mit $c(e) = f(P)$.
Reduziert man die Kapazität aller Kanten auf P um $f(P)$ (entfernt dabei also e), so ergibt sich ein neues Netzwerk mit maximalem Fluß $f' = f - c(P)$. Durch iteratives Anwenden ergeben sich so bis zu $|E|$ Pfade, die zusammen gerade f ergeben.

Hausaufgabe 1 (10 Punkte)
Ermitteln Sie einen maximalen Fluß für das Netzwerk auf der folgenden Seite, wobei die Quellen links und die Senken rechts sind. Beweisen Sie die Maximalität durch Angabe eines gleichgroßen Schnitts. Alle Kapazitäten sind 1.

Lösung:



Hausaufgabe 2 (10 Punkte)

Finden Sie eine effiziente Möglichkeit, das folgende Problem zu lösen: Gegeben sind ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Kapazitätsfunktion $c\colon V \to \mathbf{N}$ und eine Knotenteilmenge $C \subseteq V$. Jeder Knoten $v \in C$ kann bis zu $c(v)$ der angrenzenden Kanten *abdecken*. Die Frage ist, ob auf diese Weise *alle* Kanten des Graphen abgedeckt werden können.

Lösung:

Hier bietet sich wieder eine Modellierung als Flußproblem an: Wir konstruieren das Netzwerk (V', E', c') mit den Knoten $V' := \{s, t\} \cup E \cup C$ wie folgt:
$c'\big((s, e)\big) = 1$ für alle $e \in E$ und $c'\big((v, t)\big) = c(v)$ für $v \in C$. Außerdem setzen wir $c'\big((e, v)\big) = 1$ falls e in G inzident zu v ist.

Falls die Knoten aus C alle Kanten in G abdecken ohne ihre Kapazität zu überschreiten, kann jede Kante e einem Knoten $v(e)$ zugeordnet werden, der sie abdeckt. Es ist dann leicht, einen Fluß der Größe $|E|$ zu konstruieren, indem über jeden Pfad $s, e, v(e), t$ genau 1 fließt. Da alle Kanten in G abgedeckt werden, ohne die Kapazität der Koten zu überschreiten, ist dies ein gültiger Fluß.

Laut Vorlesung ist in einem Netzwerk mit ganzzahligen Kapazitäten der maximale Fluß auch ganzzahlig. Falls es in diesem Netzwerk einen ganzzahligen Fluß der Größe $|E|$ gibt, so covert jeder Knoten v alle Kanten e für die $c'\big((e, v)\big) = 1$ gilt. Offensichtlich können so alle Kanten abgedeckt werden ohne die Kapazitäten der Knoten zu verletzen.