Entwurf eines FPTAS

Wir betrachten Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} \text{maximiere } & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{unter } & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \text{ für } j = 1, \ldots, m \\ & x_i \in \{0, 1\} \\ & p_i \ge 0 \\ & a_{ij} \ge 0 \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir noch $a_{ij} \le b_j$ für alle i und j annehmen, denn sonst muß ja $x_i = 0$ gelten.

Entwurf eines FPTAS

Definition

Für $1 \leq k \leq n$ nennen wir $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, k$ eine *zulässige Einschränkung*, wenn es wenigstens eine zulässige Lösung gibt, die mit $x_i = y_i$ für $i = 1, \ldots, k$ anfängt.

Wir nennen dann so eine zulässige Lösung eine *Vervollständigung* dieser zulässigen Einschränkung.

Seien nun $x_i = y_i$ und $x_i = z_i$ für $i = 1, \ldots, k$ zwei verschiedene zulässige Einschränkungen mit

$$\sum_{i=1}^{k} p_i y_i = \sum_{i=1}^{k} p_i z_i.$$

Wir sagen, daß $x_i = y_i$ die $x_i = z_i$ *dominiert*, falls es eine Vervollständigung von $x_i = y_i$ gibt, deren Wert der Zielfunktion mindestens so groß ist, wie die Zielfunktionswerte aller Vervollständigungen von $x_i = z_i$.

Wir betrachten Probleme, für welche es eine einfache Regel gibt, die Dominanz von zulässigen Einschränkungen entscheidet.

Beispiel

Knapsack: Gegeben n Gegenstände und zu jedem Gegenstand sein Wert und seine Größe. Ausserdem ist die Größe eines Rucksacks gegeben.

Ziel ist es, Gegenstände auszusuchen, die in den Rucksack gepackt werden sollen. Ihr Wert soll maximal sein, aber sie müssen alle hineinpassen.

Dieses Problem läßt sich leicht auf die gewünschte Art modellieren. Die Werte der Gegenstände sind die p_i und die a_{i1} sind ihre Größe.

Dominanz ist leicht zu entscheiden. Wie?

Entwurf eines FPTAS

Allgemein lassen sich diese Optimierungsprobleme exakt durch dynamisches Programmieren lösen:

Wenn bereits zulässige Einschränkungen S^i für $x_1, \ldots, x_i$ gegeben sind, können wir daraus alle zulässigen Einschränkungen für $x_1, \ldots, x_{i+1}$ berechnen. Aus dieser Menge können wir noch alle dominierten zulässigen Einschränkungen entfernen und erhalten dann S^{i+1}. Wir können mit dem leeren S^0 beginnen und eine optimale Lösung aus S^n entnehmen.

Problem: Von S^i nach S^{i+1} kann sich die Größe verdoppeln.

Wir betrachten verschiedene Methoden, die Größe von S^i polynomiell zu halten.

Runden

Da wir Dominanz verwenden, enthält S_i keine zwei zulässigen Einschränkungen mit gleichem Wert der Zielfunktion.

Gibt es also nur wenige mögliche, verschiedene Werte der Zielfunktion, dann bleibt S^i klein.

Eine grobe Idee besteht darin, eine Instanz I durch eine andere I' zu ersetzen, die sich nur durch die Koeffizienten p_i der Zielfunktion unterscheiden. Die neuen Koeffizienten q_i von I' sollen nur wenige verschiedene Werte der Zielfunktion erlauben.

Dabei haben I und I' immer noch dieselben zulässigen Lösungen. Ihre optimalen Lösungen können aber verschieden sein.

Wir müssen dafür sorgen, daß sie sich nicht zu sehr unterscheiden.

Beispiel

Sei $(p_1, \ldots, p_4) = (1.1, 2.1, 1001.6, 1002.3)$.

Die Zielfunktion nimmt folgende Werte in S^i an:

S^1: $\{0, 1.1\}$

S^2: $\{0, 1.1, 2.1, 3.2\}$

S^3: $\{0, 1.1, 2.1, 3.2, 1001.6, 1002.7, 1003.7, 1004.8\}$

S^4: $\{0, 1.1, 2.1, 3.2, 1001.6, 1002.3, 1002.7, 1003.4,$
$1003.7, 1004.4, 1004.8, 1005.5, 2003.9, 2005, 2006, 2007.1\}$

Insgesamt werden 31 zulässige Einschränkungen betrachtet. Ihre Zahl verdoppelt sich jeweils, da keine zwei vorkommen, für die die Zielfunktion übereinstimmt.

Wir ersetzen jetzt $(p_1, \ldots, p_4) = (1.1, 2.1, 1001.6, 1002.3)$ durch $(q_1, \ldots, q_4) = (0, 0, 1000, 1000)$.

Jetzt erhalten wir nur:

$$S^1\colon \{0\}$$
$$S^2\colon \{0\}$$
$$S^3\colon \{0, 1000\}$$
$$S^4\colon \{0, 1000, 2000\}$$

Der Wert der neuen Zielfunktion kann um höchstens 7.1 zu klein sein und der optimale Wert ist mindestens $\max\{p_i\} = 1002.3$. Das heißt $F^*(I) - F^*(I') \leq 7.1$ und $F^*(I) \geq 1002.3$. Wir erhalten

$$\frac{F^*(I) - F^*(I')}{F^*(I)} \leq 0.007.$$