Schwache Dualität

Sei wieder

$$z = \max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \,\} \tag{P}$$

und

$$w = \min\{\, b^T u \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0 \,\}. \tag{D}$$

x ist *primal zulässig*, wenn $x \in \{\, x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \,\}$.

u ist *dual zulässig*, wenn $u \in \{\, u \mid u^T A \geq c^T, u \geq 0 \,\}$.

Theorem (Schwache Dualität)

Sei $\hat{x}$ primal zulässig und $\hat{u}$ dual zulässig. Dann gilt

$$c^T \hat{x} \leq z \leq w \leq b^T \hat{u}.$$

Schwache Dualität

Beweis

$$c^T\hat{x} \le \hat{u}^T A\hat{x} \le b^T\hat{u}, \text{ denn}$$

1. $\hat{u}^T A \ge c^T$ und $\hat{x} \ge 0$
2. $A\hat{x} \le b$ und $\hat{u} \ge 0$

Da $z = c^T x$ für ein primal zulässiges x und $w = b^T u$ für ein dual zulässiges u, folgt $z \le w$.

Korollar

Falls (P) eine unbeschränkte optimale Lösung hat, dann hat (D) keine Lösung.

Dualität

Folgende Paare sind dual:

$$z = \min\{\, c^T x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \,\} \tag{P}$$

$$w = \max\{\, b^T y \mid A^T y \leq c \,\} \tag{D}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} z &= \min\{\, c^T x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \,\} \\ &= \min\left\{ c^T x \;\middle|\; \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},\; x \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z &= \min\{\, c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\} \\
&= \min\left\{\, c^T x \;\middle|\; \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},\ x \geq 0 \,\right\}
\end{aligned}
$$

Das duale Problem ist nach Definition:

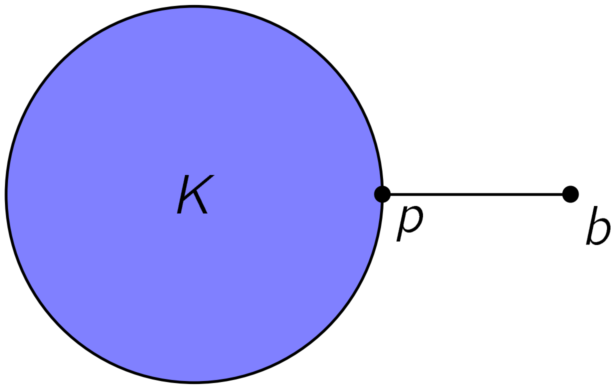
$$
\begin{aligned}
w &= \max\left\{\, (b^T, -b^T) \begin{pmatrix} y \\ \bar{y} \end{pmatrix} \;\middle|\; (A^T, -A^T) \begin{pmatrix} y \\ \bar{y} \end{pmatrix} \leq c,\ y, \bar{y} \geq 0 \,\right\} \\
&= \max\{\, b^T (y - \bar{y}) \mid A^T (y - \bar{y}) \leq c, y, \bar{y} \geq 0 \,\} \\
&= \max\{\, b^T y \mid A^T y \leq c \,\}
\end{aligned}
$$

□

Lemma (Das Projektionstheorem)

Sei K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $b \in \mathbf{R}^n$.

Sei p die *Projektion* von b auf K (d.h. der Punkt in K mit minimalem Euklidischen Abstand $|p - b|$ von b).

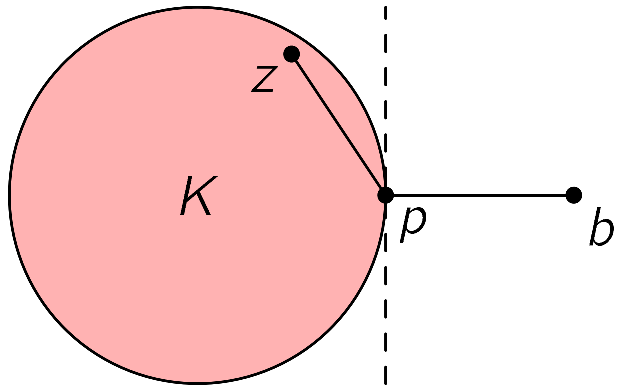


Dann gilt

$$(z - p)^T (b - p) \leq 0$$

für alle $z \in K$.

Beweis



Da K konvex ist, liegen z und b auf verschiedenen Seiten der Hyperebene, die normal zu $b-p$ durch p geht (wobei z auch auf dieser Hyperebene liegen kann).

Sei α der Winkel zwischen $z-p$ und $b-p$. Dann ist $\alpha \geq \pi/2$.

$\Rightarrow (z-p)^T(b-p) = |z-p| \cdot |b-p| \cos \alpha \leq 0$.

(Falls $b \in K$, dann gilt die Aussage trivialerweise.)

Dualität

Theorem (Farkas Lemma A)

Sei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann ist genau eine dieser Aussagen wahr:

1. Es gibt ein $x \in \mathbf{R}^n$ mit $Ax = b$, $x \geq 0$.
2. Es gibt ein $y \in \mathbf{R}^m$ mit $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.

Beweis

Angenommen beide Aussagen gälten.

$$Ax = b \Rightarrow y^T A x = y^T b \Rightarrow x^T A^T y = y^T b < 0 \tag{1}$$

$$x \geq 0,\ A^T y \geq 0 \Rightarrow x^T A^T y \geq 0 \tag{2}$$

Offensichtlich widersprechen sich (1) und (2). Also kann höchstens eine der Aussagen wahr sein.

Nehmen wir jetzt an, die erste Aussage gilt nicht.

Sei $K = \{ Ax \mid x \geq 0 \}$. K ist abgeschlossen und konvex und $b \notin K$.

Sei p die Projektion von b auf K.

Es gibt ein w mit $Aw = p$.

Gemäß Projektionstheorem gilt dann

$$(z - p)^T (b - p) \leq 0 \text{ für alle } z \in K.$$

Insbesondere gilt

$$(Ax - p)^T (b - p) \leq 0 \text{ für alle } x \geq 0.$$

Wir wählen $y = p - b$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(Ax - p)^T (b - p) &\leq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow (Ax - p)^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow (Ax - Aw)^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow (x - w)^T A^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \\
\Rightarrow x^T A^T y &\geq 0 \text{ für alle } x \geq 0 \text{ (denn } w \geq 0) \\
\Rightarrow A^T y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Damit haben wir $A^T y \geq 0$ bewiesen.