Pivotieren

Falls A_B entartet ist, kann es ein Problem geben: Obwohl $\bar{c}_j < 0$, können wir x_j nicht erhöhen, ohne eine Komponente von x_B negativ zu machen.

Dies kommt in der Praxis oft vor.

Wir können dann *pivotieren*: Wir wählen ein $k \in B$ mit $x_k = 0$ und ein $j \in N$. Dann setzen wir

$$B := B - \{k\} \cup \{j\} \text{ und } N := N - \{j\} \cup \{k\}.$$

Dabei ändert sich x und $c^T x$ nicht, aber wir haben eine andere Basis.

Es kann zu einem Zyklus kommen und der Algorithmus terminiert nicht.

Das kommt in der Praxis nicht oft vor.

Maximiere z unter den Bedingungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} z & - & 300x_1 & - & 500x_2 & = & -36000 & (\alpha) \\ x_3 & + & x_1 & + & 2x_2 & = & 170 & (\beta) \\ x_4 & + & x_1 & + & x_2 & = & 150 & (\gamma) \\ x_5 & & & + & 3x_2 & = & 180 & (\delta) \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrc} z & - & 300x_1 & + & \frac{500}{3}x_5 & = & -6000 & (\alpha' = \alpha + 500\delta') \\ x_3 & + & x_1 & - & \frac{2}{3}x_5 & = & 50 & (\beta' = \beta - 2\delta') \\ x_4 & + & x_1 & - & \frac{1}{3}x_5 & = & 90 & (\gamma' = \gamma - \delta') \\ x_2 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & 60 & (\delta' = \frac{1}{3}\delta) \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
z & - & 300x_1 & + & \frac{500}{3}x_5 & = & -6000 & (\alpha') \\
x_3 & + & x_1 & - & \frac{2}{3}x_5 & = & 50 & (\beta') \\
x_4 & + & x_1 & - & \frac{1}{3}x_5 & = & 90 & (\gamma') \\
x_2 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & 60 & (\delta') \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrc}
z & + & 300x_3 & - & \frac{100}{3}x_5 & = & 9000 & (\alpha'' = \alpha' + 300\beta'') \\
x_1 & + & x_3 & - & \frac{2}{3}x_5 & = & 50 & (\beta'' = \beta') \\
x_4 & - & x_3 & + & \frac{1}{3}x_5 & = & 40 & (\gamma'' = \gamma' - \beta'') \\
x_2 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & 60 & (\delta'' = \delta' + 0\beta'') \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
z & + & 300x_3 & - & \frac{100}{3}x_5 & = & 9000 & (\alpha'') \\
x_1 & + & x_3 & - & \frac{2}{3}x_5 & = & 50 & (\beta'') \\
x_4 & - & x_3 & + & \frac{1}{3}x_5 & = & 40 & (\gamma'') \\
x_2 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & 60 & (\delta'') \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrc}
z & + & 200x_3 & + & 100x_4 & = & 13000 & (\alpha''' = \alpha'' + \frac{100}{3}\gamma''') \\
x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 130 & (\beta''' = \beta'' \frac{2}{3}\gamma''') \\
x_5 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 120 & (\gamma''' = 3\gamma'') \\
x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 20 & (\delta''' = \delta'' - \frac{1}{3}\gamma''') \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Das Simplex-Tableau

1. Maximiere $z = c^T x$ unter $Ax = b$.
2. Wir beginnen mit einer *zulässigen Basislösung*. Wenn A_B eine Basis ist, dann ist $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ eine *Basislösung*. Wenn $x_B \geq 0$, dann ist x eine *zulässige Basislösung*.
3. Für jedes $x_N \in \mathbf{R}^{n-m}$ gibt es genau ein $x_B \in \mathbf{R}^m$, so daß $Ax = b$, nämlich $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$.
4. Ebenso läßt sich $z = c^T x$ als $z = \bar{c}^T x_N + c_B^T A_B^{-1} b$ schreiben, falls $Ax = b$.
5. Im *Simplex-Tableau* werden z und x_B als (nicht homogene) Linearkombinationen von x_N dargestellt.

Das Simplex-Tableau

	y_1	$\cdots$	y_k	
z	$\bar{a}_{01}$	$\cdots$	$\bar{a}_{0k}$	$\bar{b}_0$
x_1	$\bar{a}_{11}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\bar{b}_1$
x_2	$\bar{a}_{21}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2k}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	$\bar{a}_{21}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2k}$	$\bar{b}_n$

Die Basisvariablen sind x_i, die Nicht-Basisvariablen y_i. Das Tableau wird so gelesen:

$$z + \sum_{j=1}^{k} \bar{a}_{0j} y_j = \bar{b}_0 \qquad x_i + \sum_{j=1}^{k} \bar{a}_{ij} y_j = \bar{b}_i$$

Das Simplex-Tableau

	y_1	$\cdots$	y_k	
z	$\bar{a}_{01}$	$\cdots$	$\bar{a}_{0k}$	$\bar{b}_0$
x_1	$\bar{a}_{11}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\bar{b}_1$
x_2	$\bar{a}_{21}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2k}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	$\bar{a}_{21}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2k}$	$\bar{b}_n$

Wähle $s \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\bar{a}_{0s} < 0$ (Pivotspalte).

Wähle $t \in \{1, \ldots, n\}$ mit minimalem $\bar{b}_t/\bar{a}_{ts}$ (Pivotzeile).

$\bar{a}_{tj} := \bar{a}_{tj}/\bar{a}_{ts}$ für $j \neq s$, $\bar{b}_t := \bar{b}_t/\bar{a}_{ts}$, $\bar{a}_{ts} := 1/\bar{a}_{ts}$.

$\bar{a}_{ij} := \bar{a}_{ij} - \bar{a}_{tj}\bar{a}_{is}$ für $j \neq s$, $\bar{b}_i := \bar{b}_i - \bar{b}_t\bar{a}_{is}$ $(i \neq t)$, $\bar{a}_{is} := -\bar{a}_{ts}\bar{a}_{is}$.

Vertausche x_t mit y_s.

Beispiel

	x_1	x_2	
z	-300	-500	-36000
x_3	1	2	170
x_4	1	1	150
x_5	0	3	180

---

	x_1	x_5	
z	-300	$500/3$	-6000
x_3	1	$-2/3$	50
x_4	1	$-1/3$	90
x_2	0	$1/3$	60

Beispiel

	x_1	x_5	
z	-300	$500/3$	-6000
x_3	1	$-2/3$	50
x_4	1	$-1/3$	90
x_2	0	$1/3$	60

---

	x_3	x_5	
z	300	$-100/3$	9000
x_1	1	$-2/3$	50
x_4	-1	$1/3$	40
x_2	0	$1/3$	60

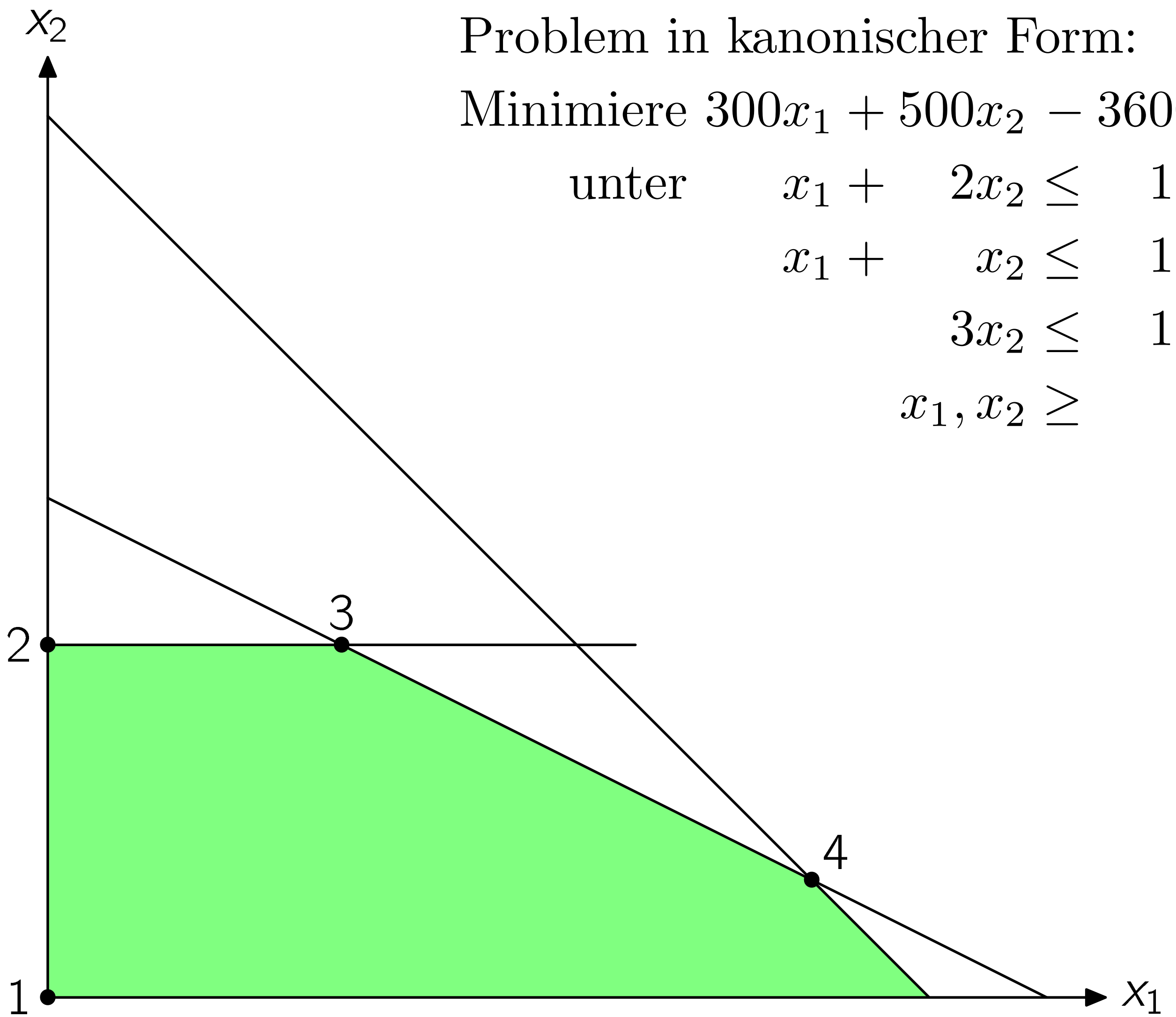
Beispiel

	x_3	x_5	
z	300	$-100/3$	9000
x_1	1	$-2/3$	50
x_4	-1	$1/3$	40
x_2	0	$1/3$	60

---

	x_3	x_4	
z	300	100	13000
x_1	-1	2	130
x_5	-3	3	120
x_2	1	-1	20

Beispiel



Problem in kanonischer Form:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\text{Minimiere} & 300x_1 + 500x_2 - 36000 & & & \\
\text{unter} & x_1 + & 2x_2 \leq & 170 \\
& x_1 + & x_2 \leq & 150 \\
& & 3x_2 \leq & 180 \\
& & x_1, x_2 \geq & 0
\end{array}
$$

Beispiel

	x_1	x_2	
z	-300	-500	-36000
x_3	1	2	170
x_4	1	1	150
x_5	0	3	180

---

	x_4	x_2	
z	300	-200	9000
x_3	-1	1	20
x_1	1	1	150
x_5	0	3	180

Beispiel

	x_4	x_2	
z	300	−200	9000
x_3	−1	1	20
x_1	1	1	150
x_5	0	3	180

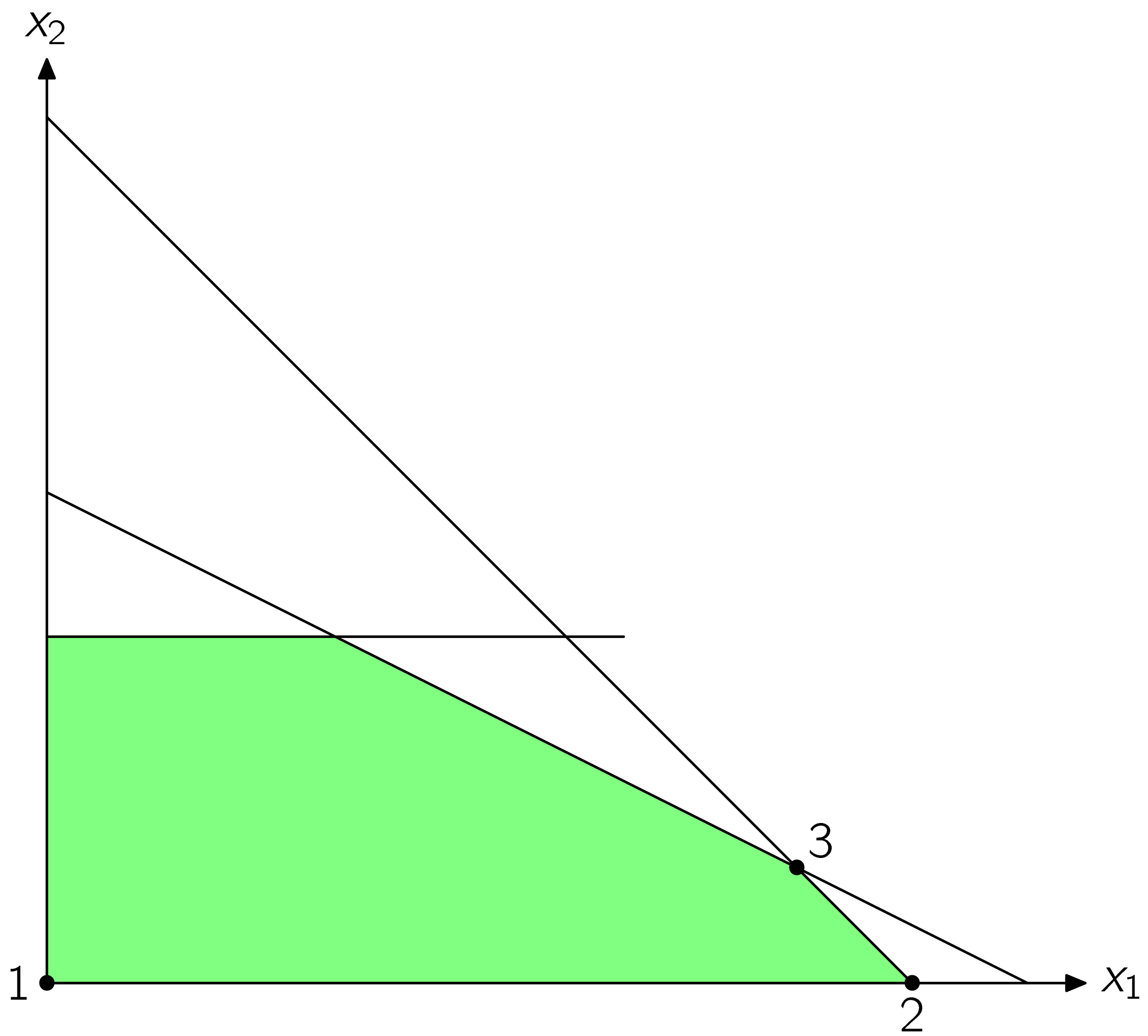
---

	x_4	x_3	
z	100	200	13000
x_2	−1	1	20
x_1	2	−1	130
x_5	3	−3	120

Beispiel

Problem in kanonischer Form:

$$\begin{array}{rrrrl}
\text{Minimiere} & 300x_1 + 500x_2 - 36000 & & & \\
\text{unter} & x_1 + & 2x_2 \leq & 170 \\
 & x_1 + & x_2 \leq & 150 \\
 & & 3x_2 \leq & 180 \\
 & & x_1, x_2 \geq & 0
\end{array}$$

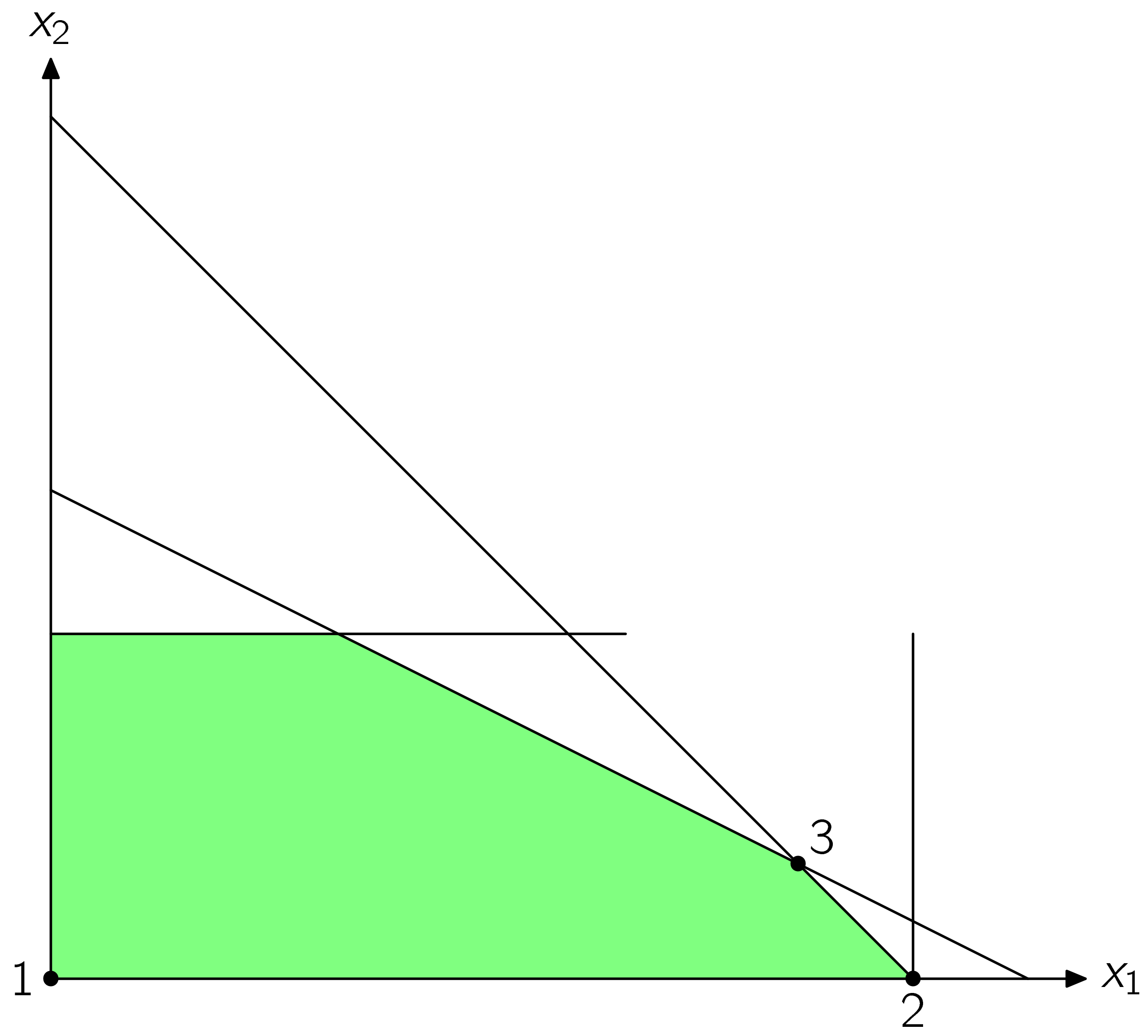


x_2
x_1
1
2
3

Entartete Basen

Problem in kanonischer Form:

$$
\begin{array}{lrrrr}
\text{Minimiere} & 300x_1 + & 500x_2 & - & 36000 \\
\text{unter} & x_1 + & 2x_2 & \leq & 170 \\
 & x_1 + & x_2 & \leq & 150 \\
 & & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & x_1 & & \leq & 150 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



x_2
x_1
1
2
3

Entartete Basen

	x_1	x_2	
z	-300	-500	-36000
x_3	1	2	170
x_4	1	1	150
x_5	0	3	180
x_6	1	0	150

---

	x_4	x_2	
z	300	-200	9000
x_3	-1	1	20
x_1	1	1	150
x_5	0	3	180
x_6	-1	-1	**0**

Entartete Basen

	x_4	x_2	
z	300	-200	9000
x_3	-1	1	20
x_1	1	1	150
x_5	0	3	180
x_6	-1	-1	**0**

---

	x_4	x_3	
z	100	200	13000
x_2	-1	1	20
x_1	2	-1	130
x_5	3	-3	120
x_6	-2	1	20

Entartete Basen

	x_1	x_2	
z	-300	-500	-36000
x_3	1	2	170
x_4	1	1	150
x_5	0	3	180
x_6	1	0	150

	x_6	x_2	
z	300	-500	9000
x_3	-1	2	20
x_4	-1	1	**0**
x_5	0	3	180
x_1	1	0	150

Entartete Basen

	x_6	x_2	
z	300	-500	9000
x_3	-1	2	20
x_4	-1	1	**0**
x_5	0	3	180
x_1	1	0	150

---

	x_6	x_4	
z	-200	500	9000
x_3	1	2	20
x_2	-1	1	**0**
x_5	3	-3	180
x_1	1	0	150

Entartete Basen

	x_6	x_4	
z	-200	500	9000
x_3	1	2	20
x_2	-1	1	**0**
x_5	3	-3	180
x_1	1	0	150

---

	x_3	x_4	
z	200	900	13000
x_6	1	2	20
x_2	1	3	20
x_5	-3	-9	120
x_1	-1	-2	130

Wahl des Pivot-Elements

Zusammenfassung:

- Wir können die s-te Spalte als Pivotzeile wählen, falls $\bar{c}_s < 0$.
- Eine übliche Wahl ist das minimale $\bar{c}_s$ (steepest descent).
- Falls $\bar{a}_{is} \leq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, dann ist die minimale Lösung unbeschränkt.
- Andernfalls wählt man t als Pivotspalte, so daß $\bar{b}_t / \bar{a}_{ts}$ minimal für $\bar{a}_{ts} > 0$ ist.
- Falls es mehrere gleich gute $\bar{b}_t / \bar{a}_{ts}$ gibt, dann gelangt man zu einer entarteten Basis. Durch eine *Pivotstrategie* muß eines der t gewählt werden.

Pivotstrategien

Eine übliche Strategie ist es, nachdem s durch steepest-descent festgelegt wurde, unter den möglichen t das erste zu nehmen.

Dabei kann es aber zu einem Zyklus kommen, der aus einer entarteten Ecke nicht mehr herauskommt. Dies passiert aber in der Praxis so gut wie nie.

Durch zufällige Wahl eines Kandidaten läßt sich dieses pathologische Verhalten einfach verhindern.

Es gibt deterministische Strategien, die einen Zyklus ausschließen. Sie sind aber umständlich zu implementieren und scheinen langsamer zur optimalen Lösung zu gelangen.

Der Zweiphasenalgorithmus

Es sei ein Problem in der Form $Ax \leq b, x \geq 0$ mit $b \geq 0$ gegeben.

Dann ist das zugehörige Problem in Standardform
$Ax + Iy = b, x \geq 0, y \geq 0$.

Dafür ist $y = b, x = 0$ eine zulässige Basislösung, falls wir y als Basisvariablenvektor wählen. Wir können sofort mit dem Simplexalgorithmus starten.

Was machen wir aber, wenn wir ein allgemeines Problem lösen wollen, für das eine zulässige Basislösung nicht bekannt ist?

Der Zweiphasenalgorithmus

Es sei $c^T x$ zu minimieren unter $Ax = b, x \geq 0$ (Problem A).

Konstruiere ein neues Problem (Problem B):

Minimiere $s_1 + \cdots + s_m$ unter $Ax + Is = b, x \geq 0, y \geq 0$.

Theorem

Es gibt eine zulässige Basislösung zu Problem A genau dann, wenn $s = 0$ die optimale Lösung von Problem B ist. Ist (x, s) die Lösung von B, dann ist x eine zulässige Basislösung von A.

Der Zweiphasenalgorithmus

Es sei $c^T x$ zu minimieren unter $Ax = b, x \geq 0$.

1. Negiere alle Zeilen i mit $b_i < 0$.
2. Minimiere $s_1 + \cdots + s_m$ unter $Ax + Is = b, x \geq 0, y \geq 0$ mit dem Simplexalgorithmus. Nehme $x = 0, s = b$ als zulässige Anfangsbasislösung.
3. Falls $s_1 + \cdots + s_m > 0$, dann gibt es keine Lösung zum Ursprungsproblem.
4. Sonst ist jetzt ein $x \geq 0$ bekannt, mit $Ax = b$.
5. Aus diesem x ergibt sich eine zulässige Basislösung.
6. In der zweiten Phase kann jetzt das ursprüngliche Problem mit dem Simplexalgorithmus gelöst werden.

Dualität

Dualität beschäftigt sich mit Paaren von linearen Programmen und der Beziehung zwischen ihnen.

Das *primale Problem* sei

$$z = \max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \,\}. \tag{P}$$

Das zugehörige *duale Problem* ist dann definiert als

$$w = \min\{\, b^T u \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0 \,\} \tag{D}$$

oder, anders geschrieben,

$$w = \min\{\, u^T b \mid u^T A \geq c^T,\ u \geq 0 \,\}.$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{Max} & & 7x_1 & + & 2x_2 & & \\
& - & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
& & 5x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\
& - & 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -7 \\
& & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\text{Min} & & 4u_1 & + & 20u_2 & - & 7u_3 & & \\
& - & u_1 & + & 5u_2 & - & 2u_3 & \geq & 7 \\
& & 2u_1 & + & u_2 & - & 2u_3 & \geq & 2 \\
& & & & & & u_1, u_2, u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dualität

Theorem

Das duale Problem des dualen Problems ist wieder das primale.

Beweis Wir beginnen mit dem dualen Problem:

$$\begin{aligned} w &= \min\{\, u^T b \mid u^T A \geq c^T,\ u \geq 0 \,\} \\ &= \max\{\, -b^T x \mid -A^T x \leq -c,\ x \geq 0 \,\} \end{aligned}$$

Das duale Problem hiervon ist:

$$\begin{aligned} &= \min\{\, -c^T x \mid -Au \geq -b,\ u \geq 0 \,\} \\ &= \max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \,\} \end{aligned}$$

Das ist jetzt das primale Problem. □