Kanonische und Normalform

Kanonische Form: Minimiere $c^T x$ unter $Ax \geq b$

Normalform: Minimiere $c^T x$ unter $Ax = b$, $x \geq 0$

Umwandlung Kanonisch $\rightarrow$ Normalform:

Minimiere $c_T x^+ - c^T x^-$ unter $Ax^+ - Ax^- - Is = b$, $x^+, x^-, s \geq 0$

Umwandlung Normalform $\rightarrow$ Kanonisch:

Minimiere $c^T x$ unter $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 100 \\
20x_1 & + & 50x_2 & + & 100x_3 & = & 6000 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 100 \\
- & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -100 \\
 & 20x_1 & + & 50x_2 & + & 100x_3 & \geq & 6000 \\
- & 20x_1 & - & 50x_2 & - & 100x_3 & \geq & -6000 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Beispiel

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & - & 5x_2 & \geq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = 5 \\ x_1 & - & 5x_2 & & & - & x_4 & & & = 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & & & - & x_5 & = 5 \\ & & & & & & & & x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}$$

x_3, x_4, x_5 sind *Schlupfvariablen.*

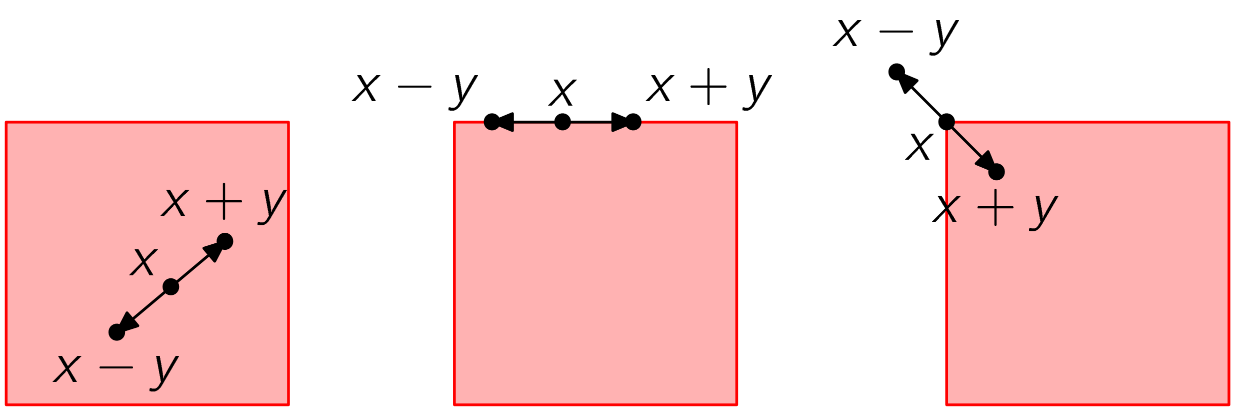
Ist dies bereits Normalform?

Geometrie des Linearen Programmierens

Sei $P = \{\, x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\} \subseteq \mathbf{R}^n$.

Definition

x ist eine *Ecke* von P, wenn es kein $y \neq 0$ mit $x + y \in P$ und $x - y \in P$ gibt.



keine Ecke keine Ecke Ecke!

Geometrie des Linearen Programmierens

Theorem A

Sei $P = \{ x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \}$.

$\min\{ c^T x \mid x \in P \}$ sei endlich (d.h., es existiere).

Dann gibt es für jedes $x \in P$ eine Ecke $x' \in P$ mit

$$c^T x' \leq c^T x.$$

Korollar

Das Minimum wird (auch) in einer Ecke angenommen.

Beweis

Sei $P = \{ x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \}$.

Wenn $x \in P$ bereits eine Ecke ist, dann $x' := x$.

Anderenfalls gibt es ein $y \neq 0$ mit $x + y, x - y \in P$.

Es gilt $Ay = 0$, denn $A(x + y) = A(x - y) = b$.

O.B.d.A. sei $c^T y \leq 0$ (sonst nehme $-y$).

Falls $c^T y = 0$, existiere ein j mit $y_j < 0$ (sonst nehme $-y$).

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen nun, daß $y \geq 0$ nicht gelten kann:

Wenn doch, dann $c^T y < 0$.

Dann ist $x + \lambda y \in P$ für alle $\lambda \geq 0$, denn $A(x + \lambda y) = b$ wegen $Ay = 0$.

Aber: $c^T(x + \lambda y) = c^T x + \lambda c^T y \to -\infty$ für $\lambda \to \infty$.

Also ist $\min\{ c^T x \mid x \in P\}$ nicht endlich. Widerspruch.

Beweis (Fortsetzung)

Es gibt ein j mit $y_j < 0$.

- Wähle $\lambda = \min\left\{ -\frac{x_j}{y_j} \;\middle|\; y_j < 0 \right\} = -\frac{x_k}{y_k}$.
- Dies ist das größte λ mit $x + \lambda y \geq 0$.
- $x + \lambda y \in P$, denn $Ay = 0 \Rightarrow A(x + \lambda y) = b$.
- $(x + \lambda y)_k = 0$, aber $x_k > 0$.

Ersetze jetzt x durch $x + \lambda y$.

Da es nur n Komponenten gibt, kann nach höchstens n Iterationen kein weiteres y mehr existieren und x muß eine Ecke sein. $\square$