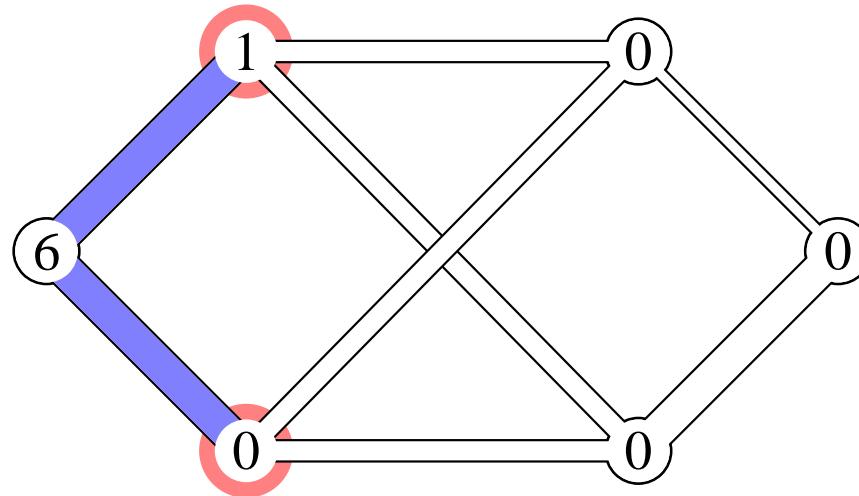


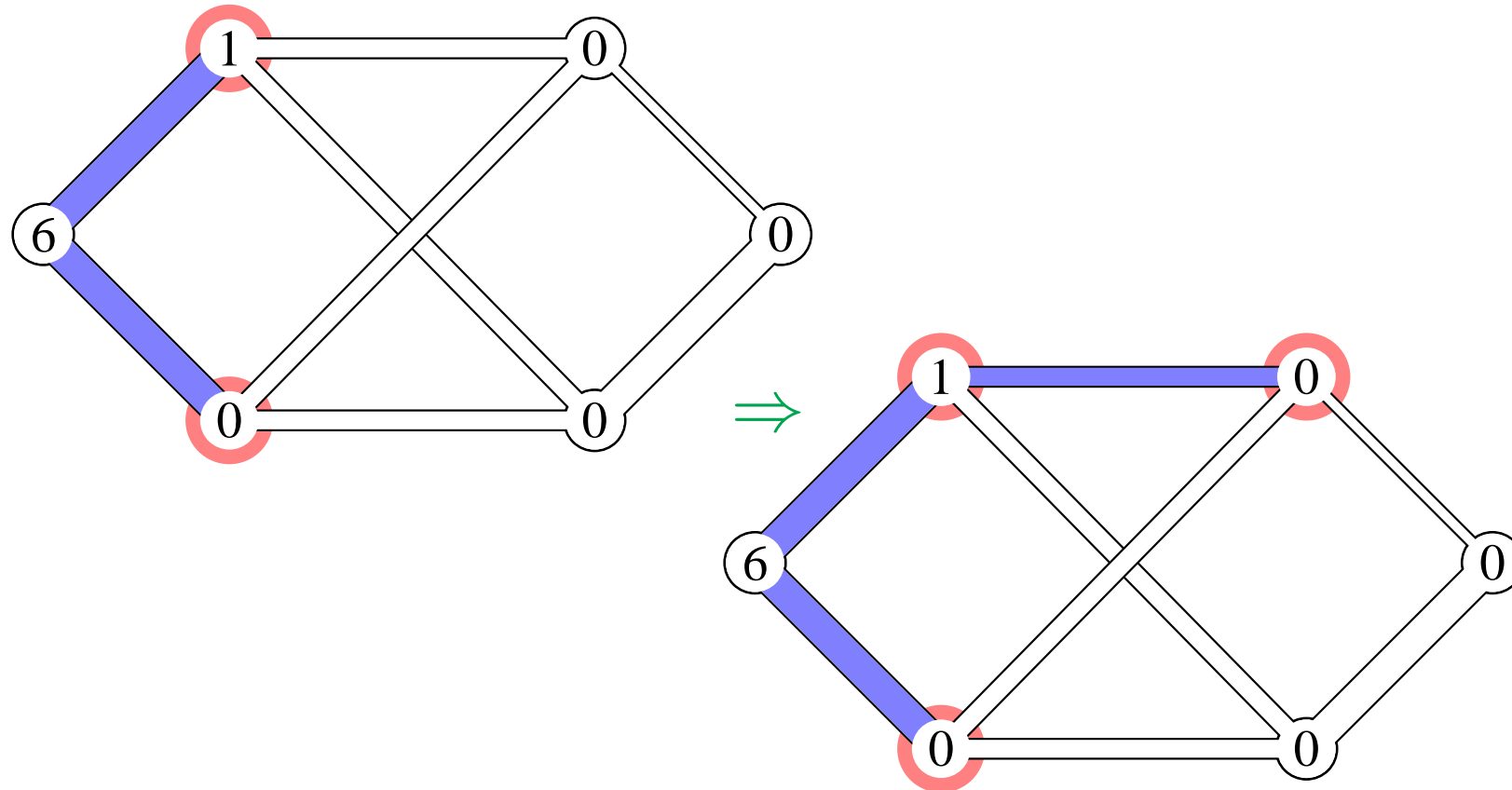
## Preflow-Push-Algorithmen



Ein *Lift-Operation*.

Falls alle Nachbarn eines überfließender Knoten im Residualnetzwerk nicht kleinere Höhe haben, darf der Knoten „geliftet“ werden. Seine neue Höhe ist um eins höher als die minimale Höhe seiner Nachbarn im Residualnetzwerk.

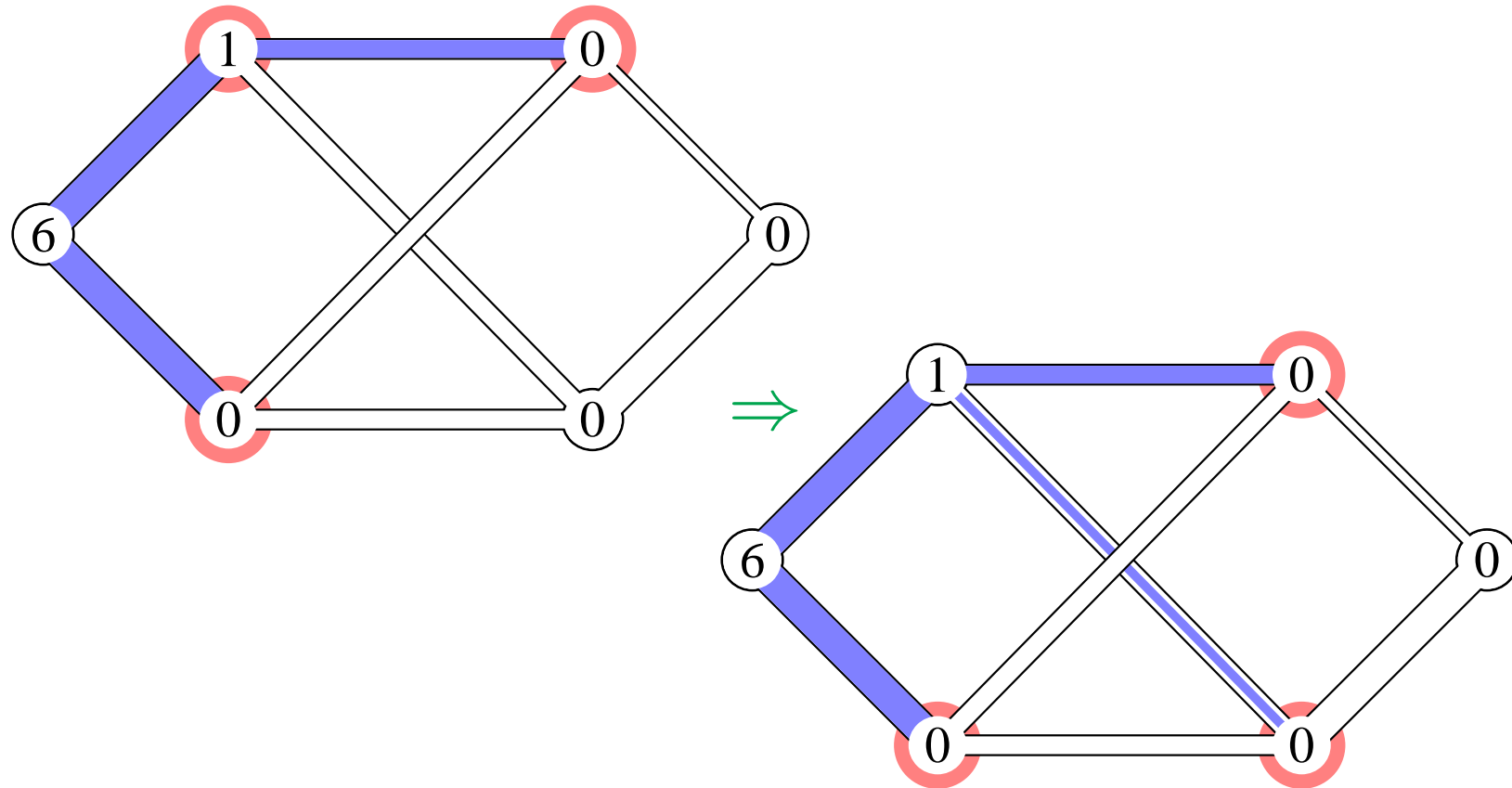
## Preflow-Push-Algorithmen



Ein *saturierter Push*.

Zu einem Nachbarn im Residualnetzwerk kann Fluß „gepusht“ werden. Die Höhe muß dorthin um 1 abnehmen.

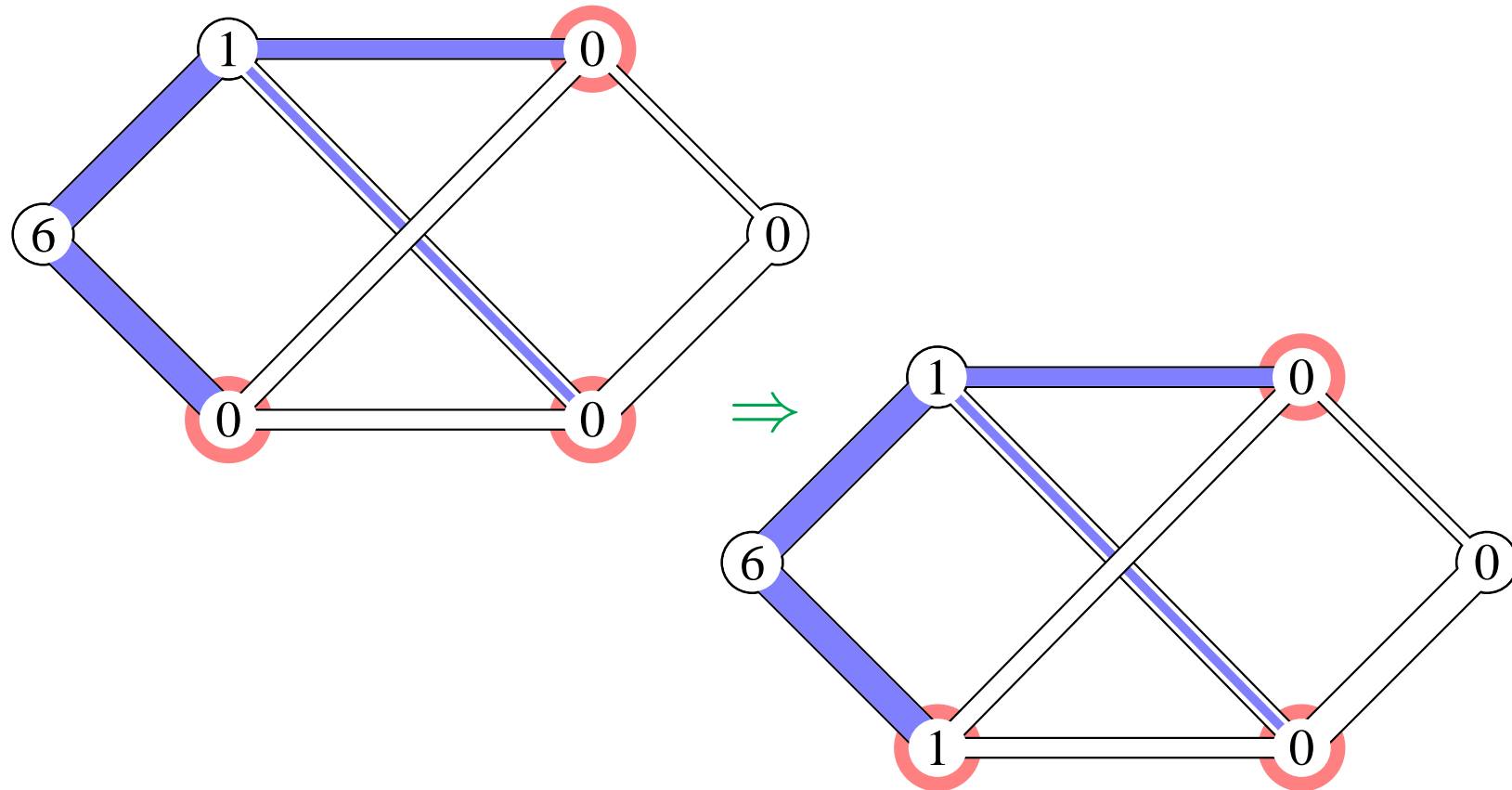
## Preflow-Push-Algorithmen



Ein *nicht-saturierter Push*.

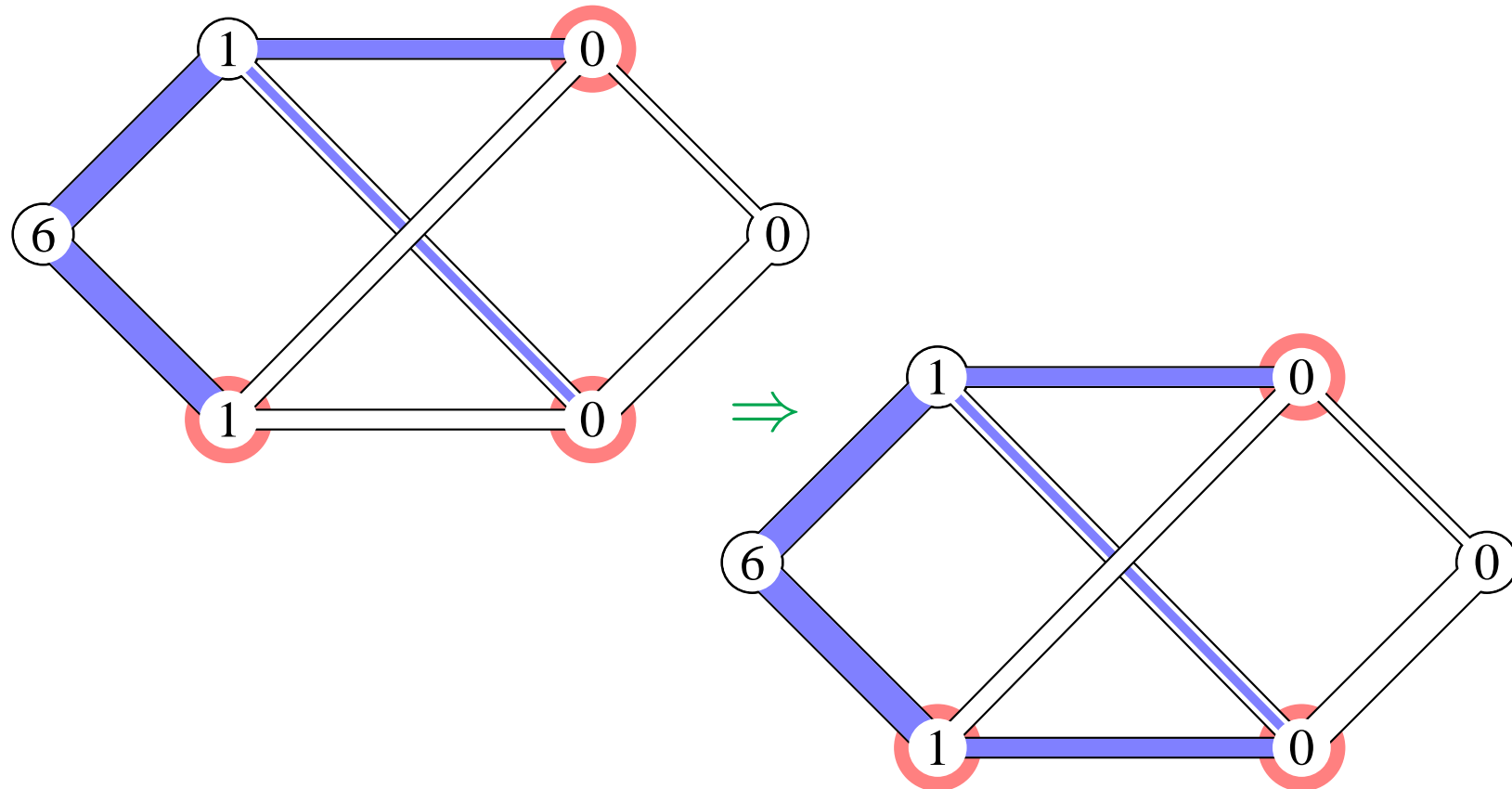
Ein „Push“ ist *saturiert*, wenn die Restkapazität der Kante erschöpft wird.

## Preflow-Push-Algorithmen



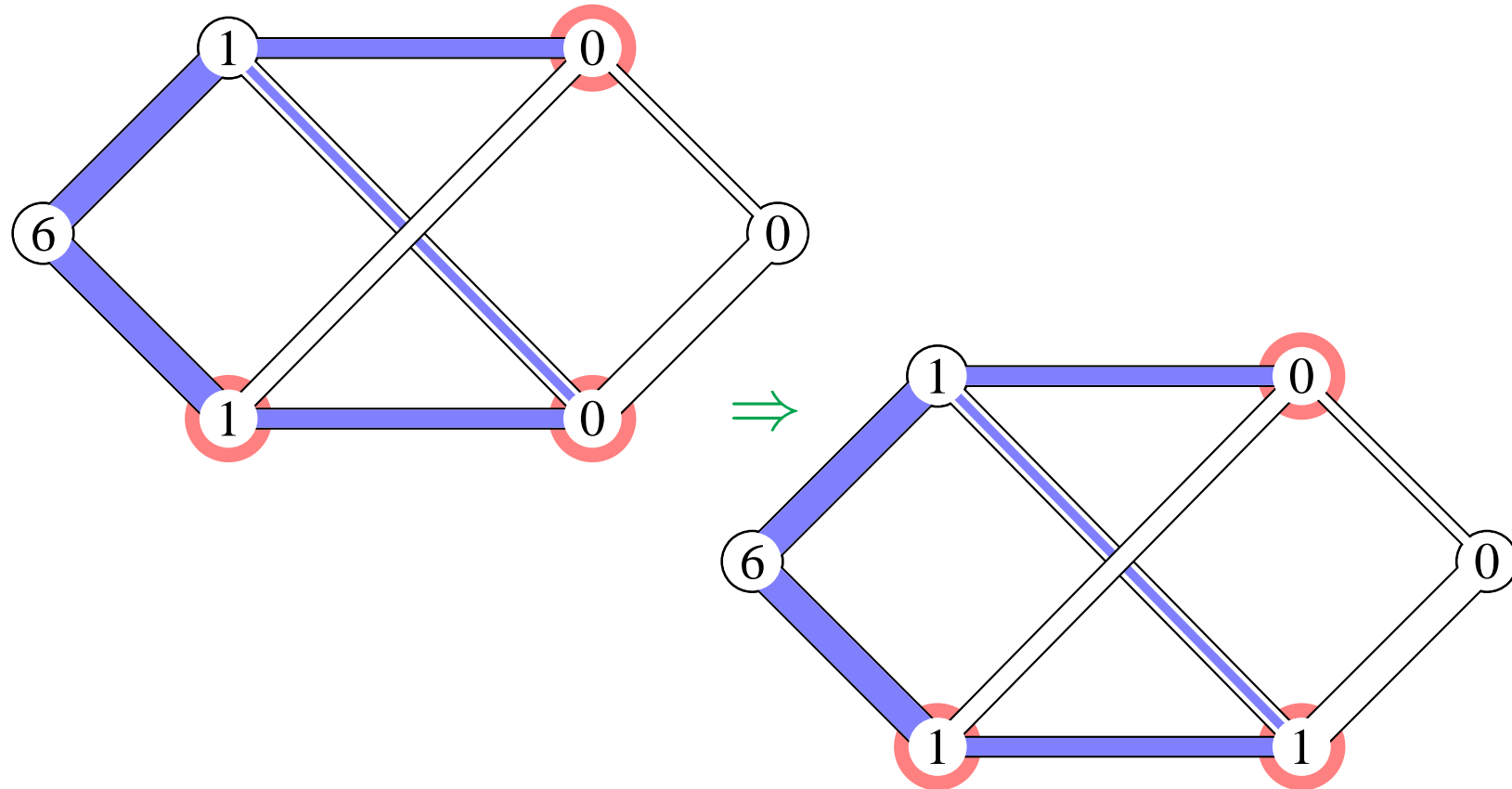
Welche Operationen sind hier auf die überfließenden Knoten anwendbar?

## Preflow-Push-Algorithmen



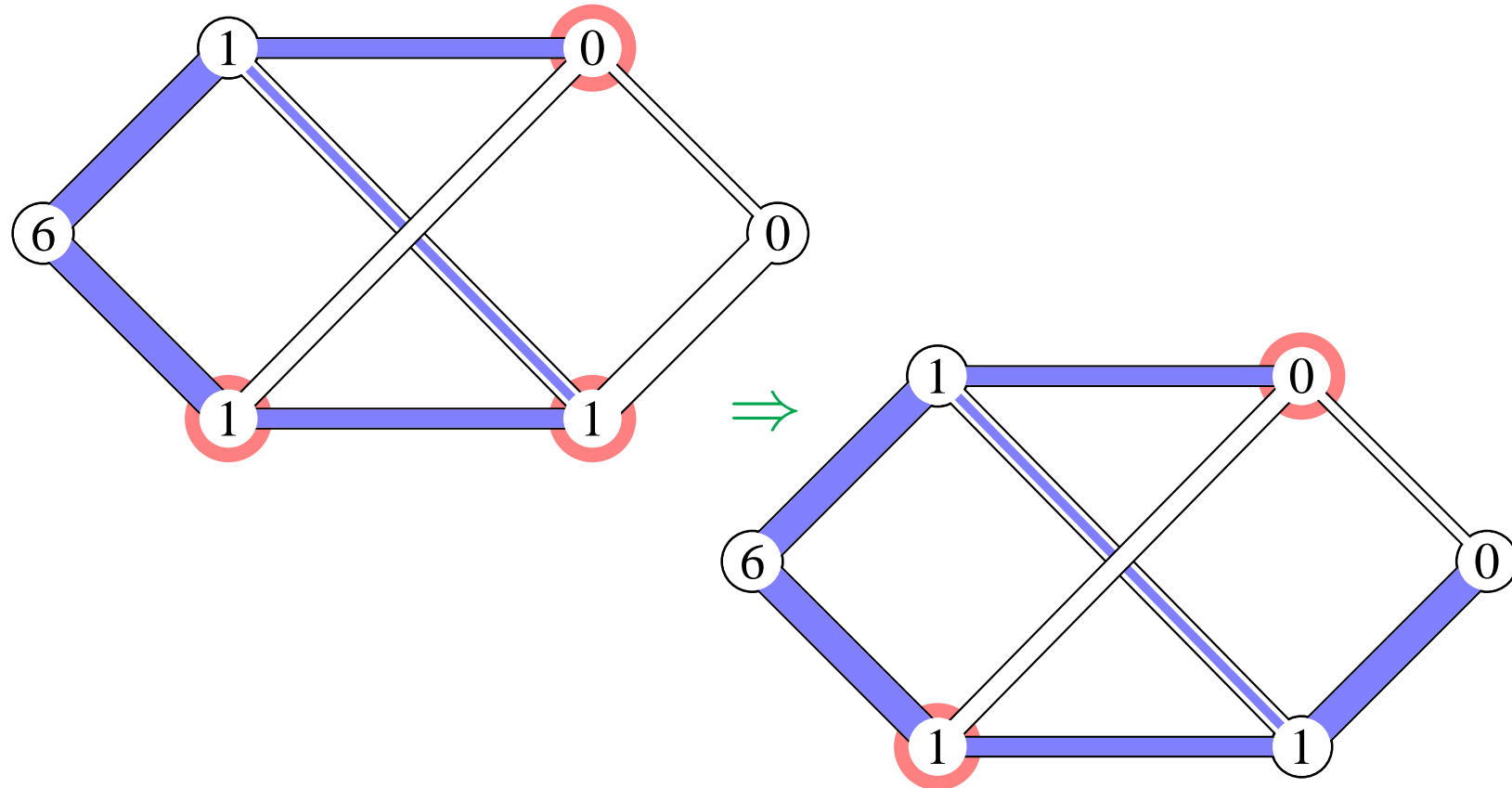
Es wurde ein saturierter Push durchgeführt.

## Preflow-Push-Algorithmen



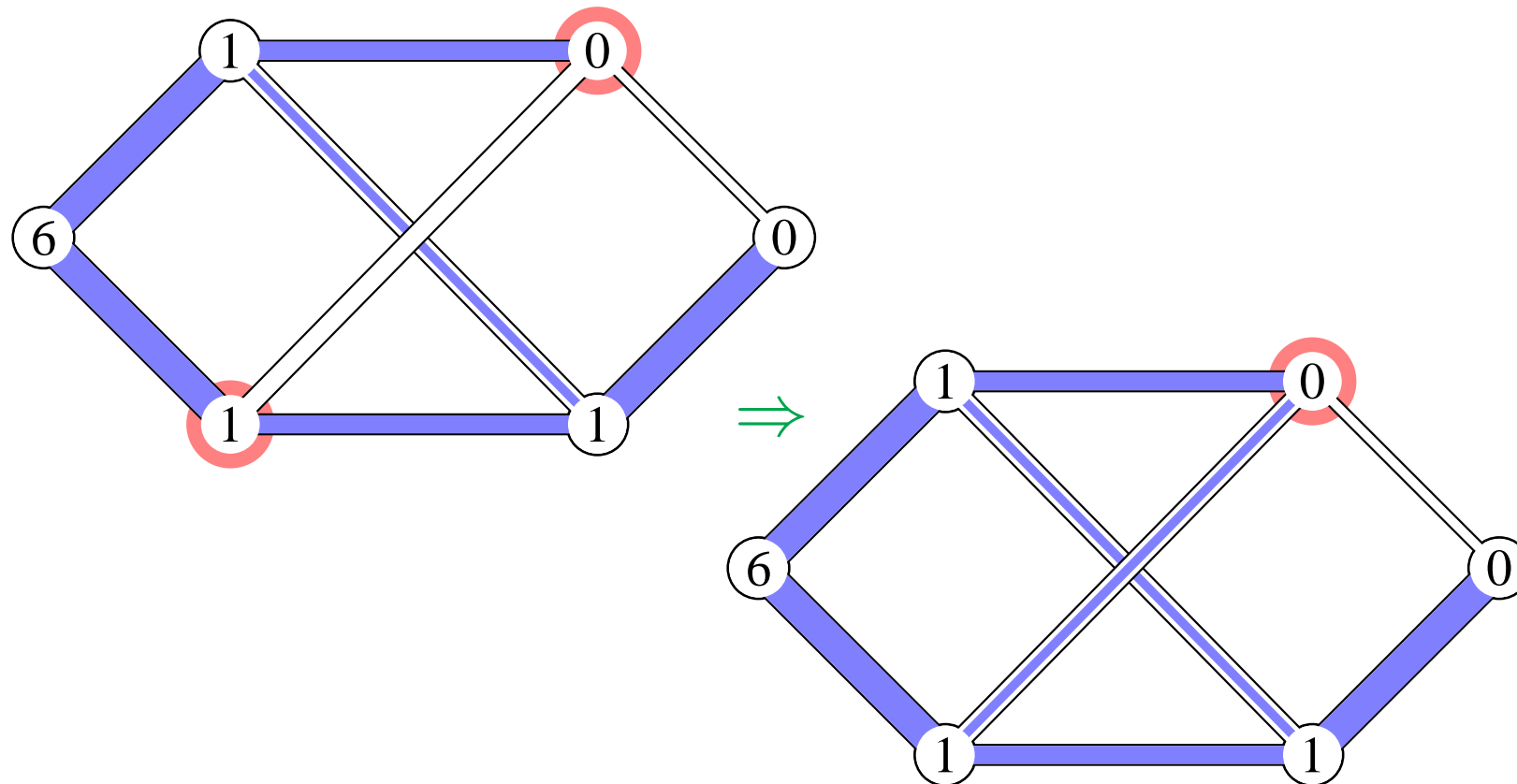
Es wurde eine Lift-Operation durchgeführt.

## Preflow-Push-Algorithmen



Es wurde ein saturierter Push durchgeführt.

## Preflow-Push-Algorithmen

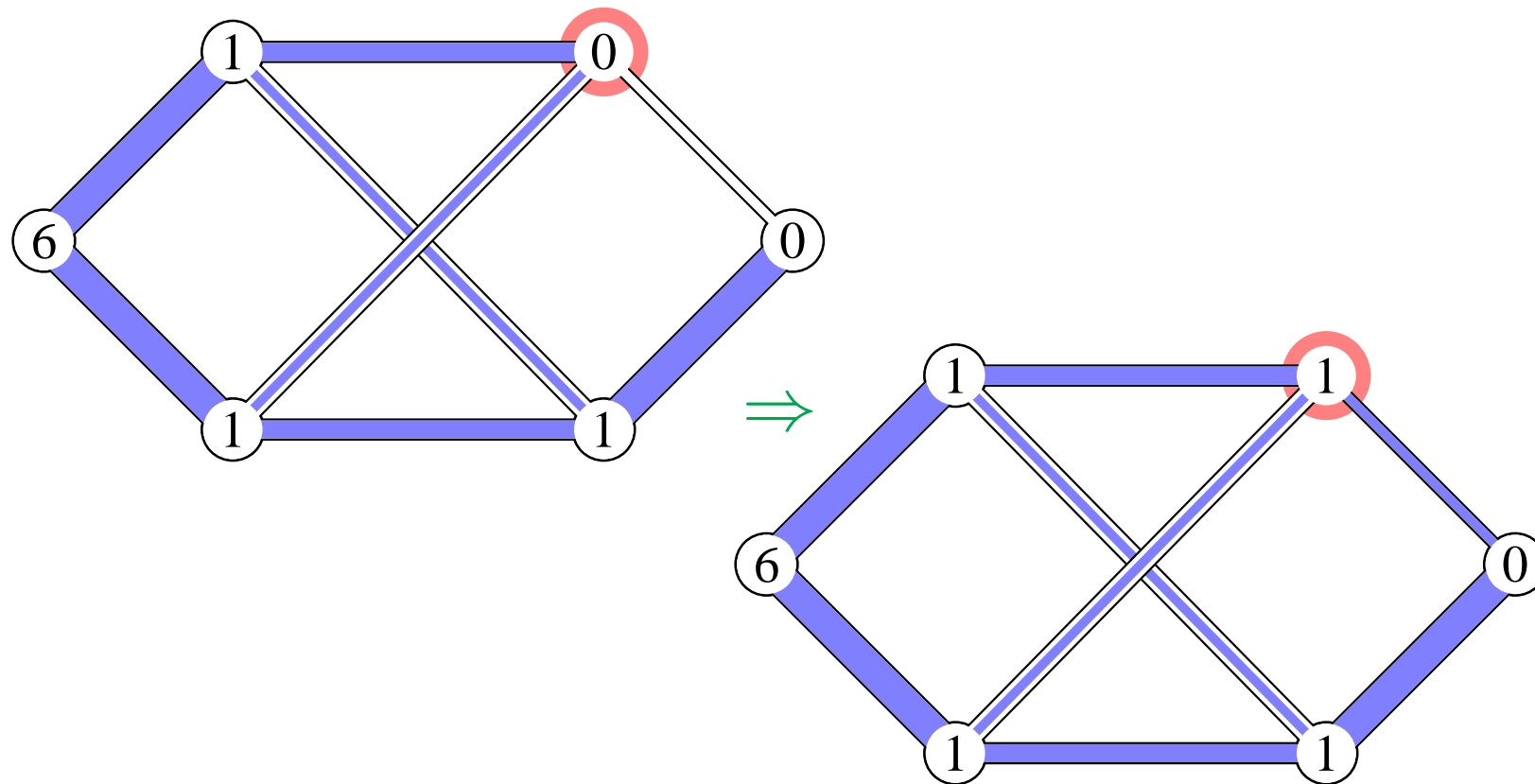


Es wurde ein nicht-saturierter Push durchgeführt.

Jetzt gibt es nur eine Wahlmöglichkeit.



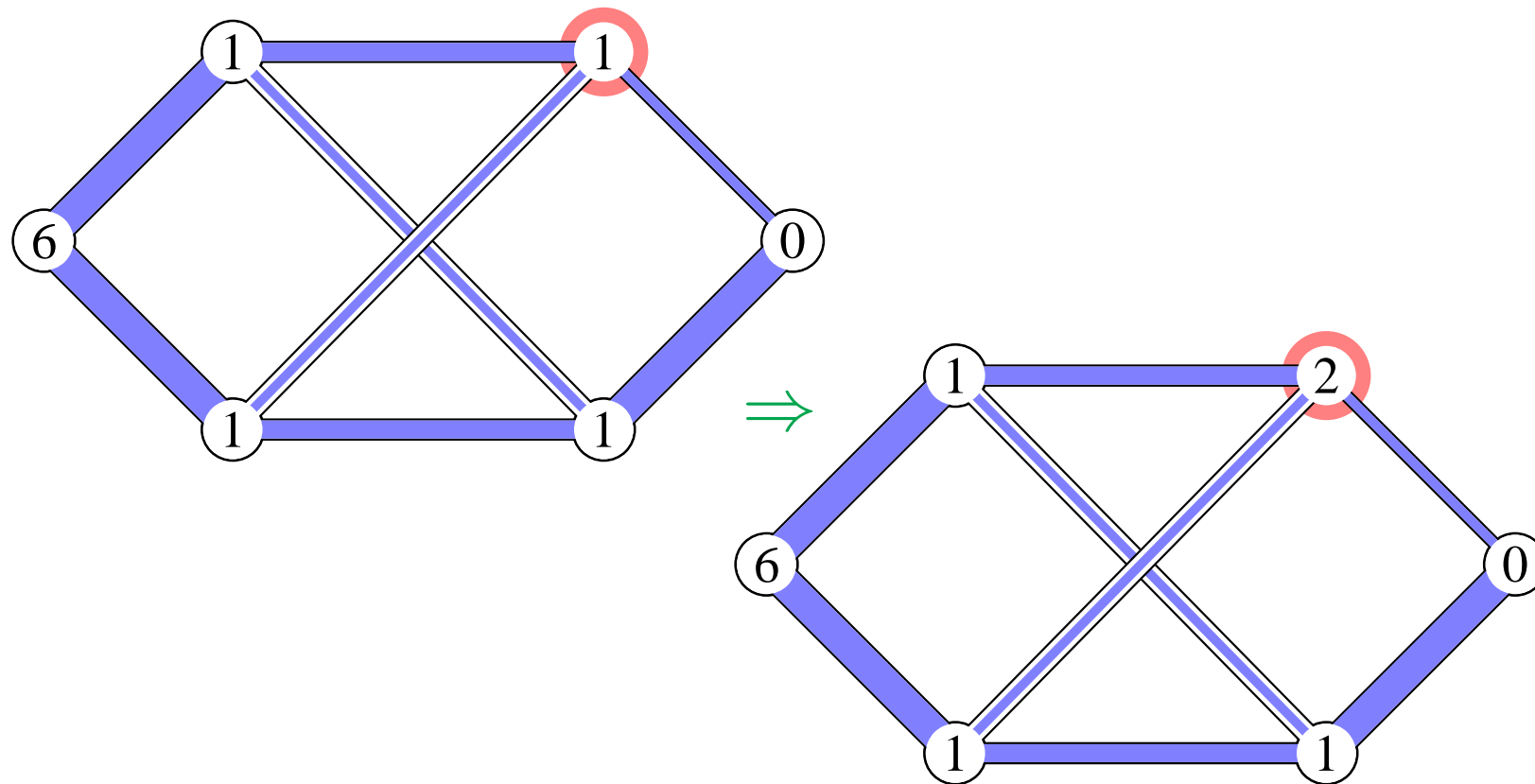
## Preflow-Push-Algorithmen



Der Knoten wurde auf Höhe 1 geliftet.

Anschließend wurde ein Push durchgeführt.

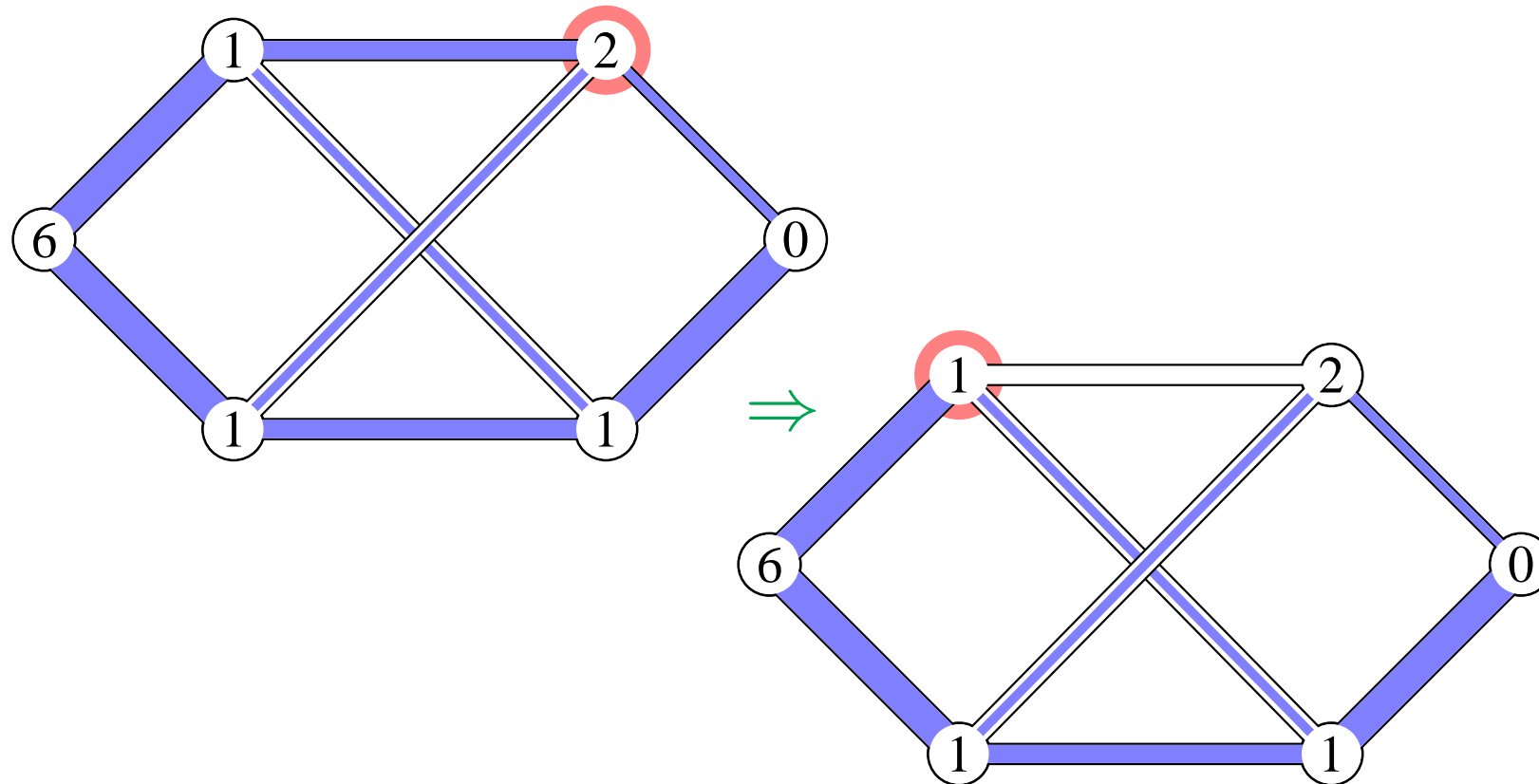
## Preflow-Push-Algorithmen



Wir mußten den Knoten auf Höhe 2 liften.

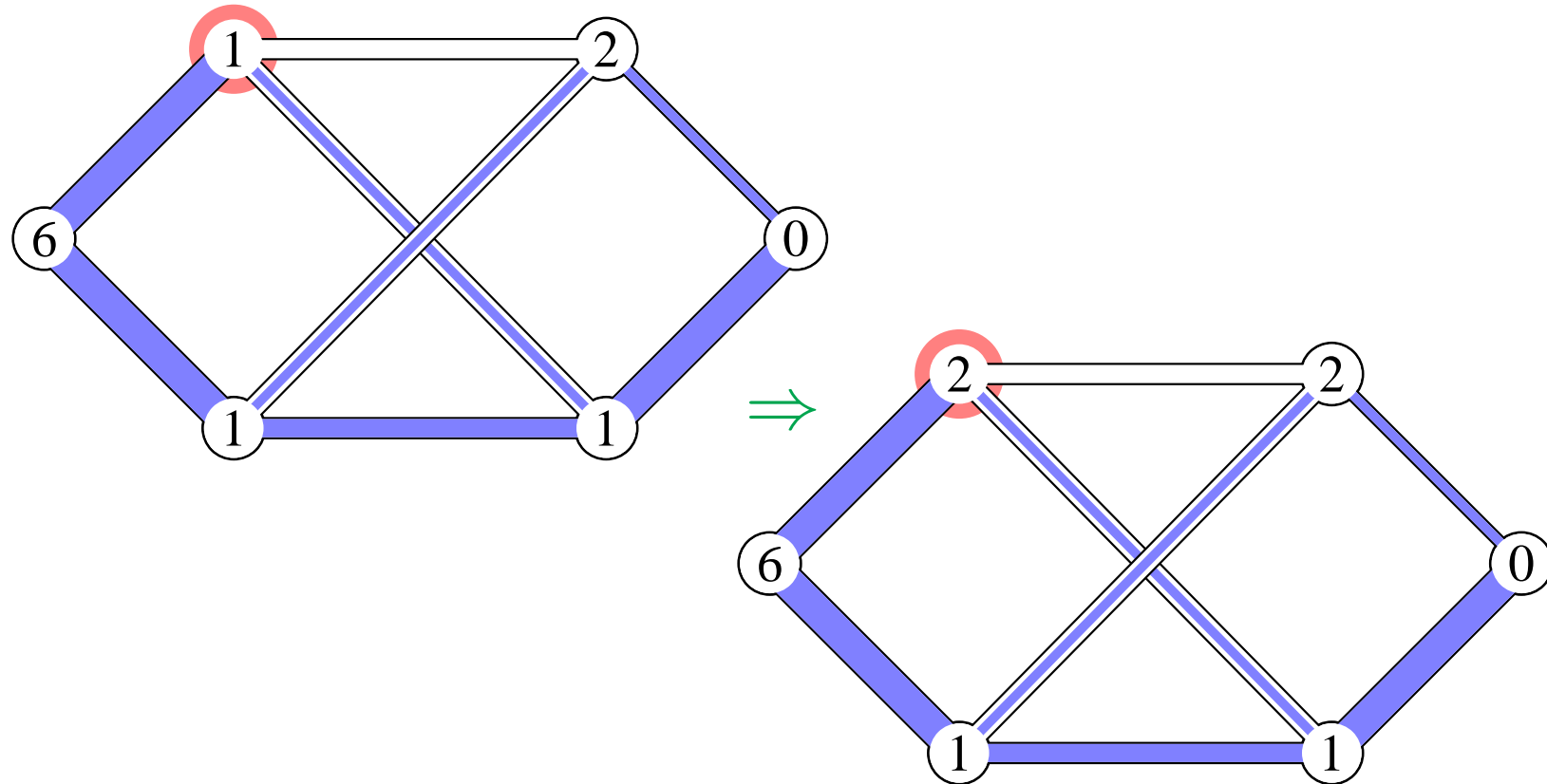
Es gibt jetzt zwei anwendbare Push-Operationen.

## Preflow-Push-Algorithmen



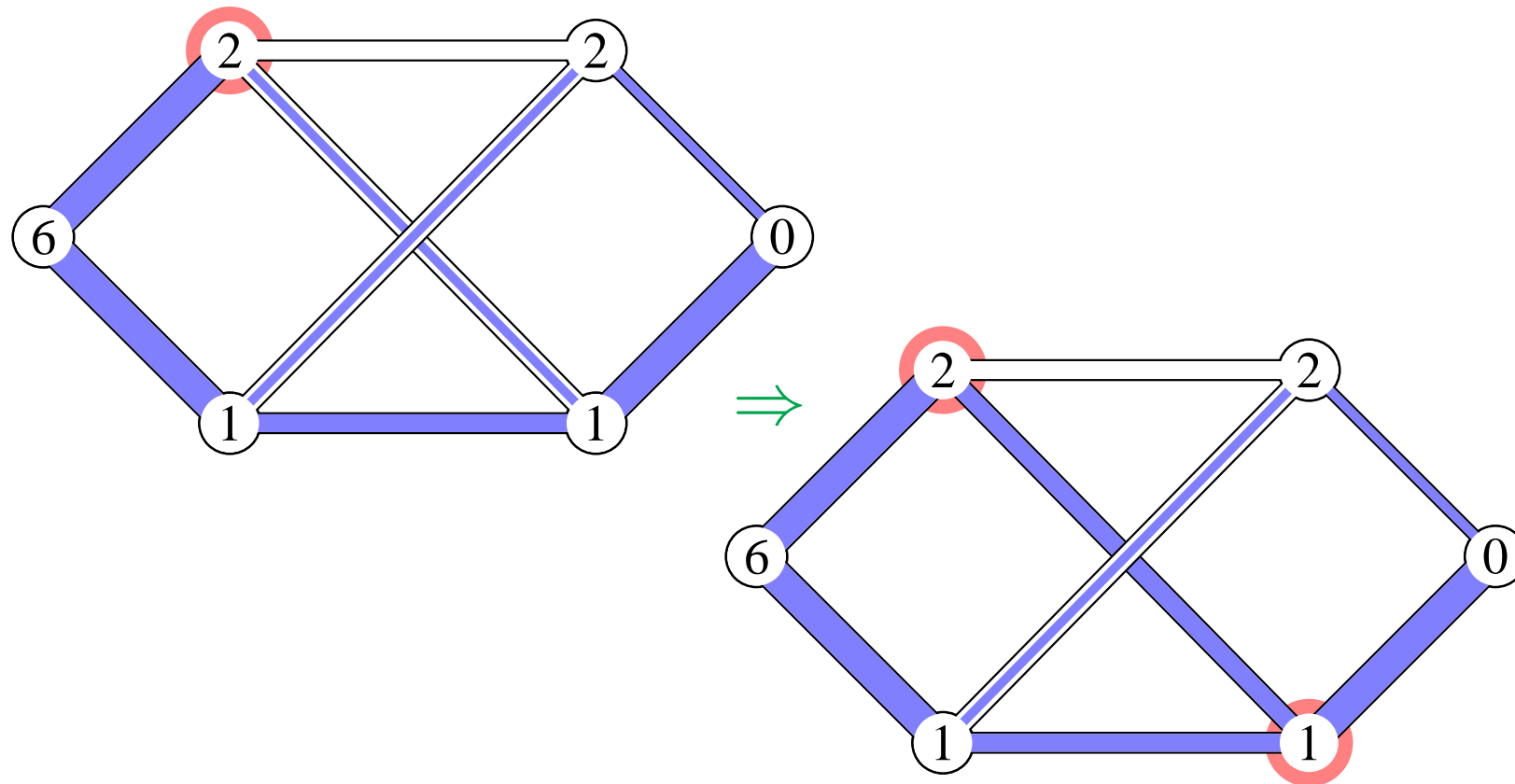
Durch einen saturierenden Push, wurde Fluß ausgelöscht.

## Preflow-Push-Algorithmen



Eine Lift-Operation.

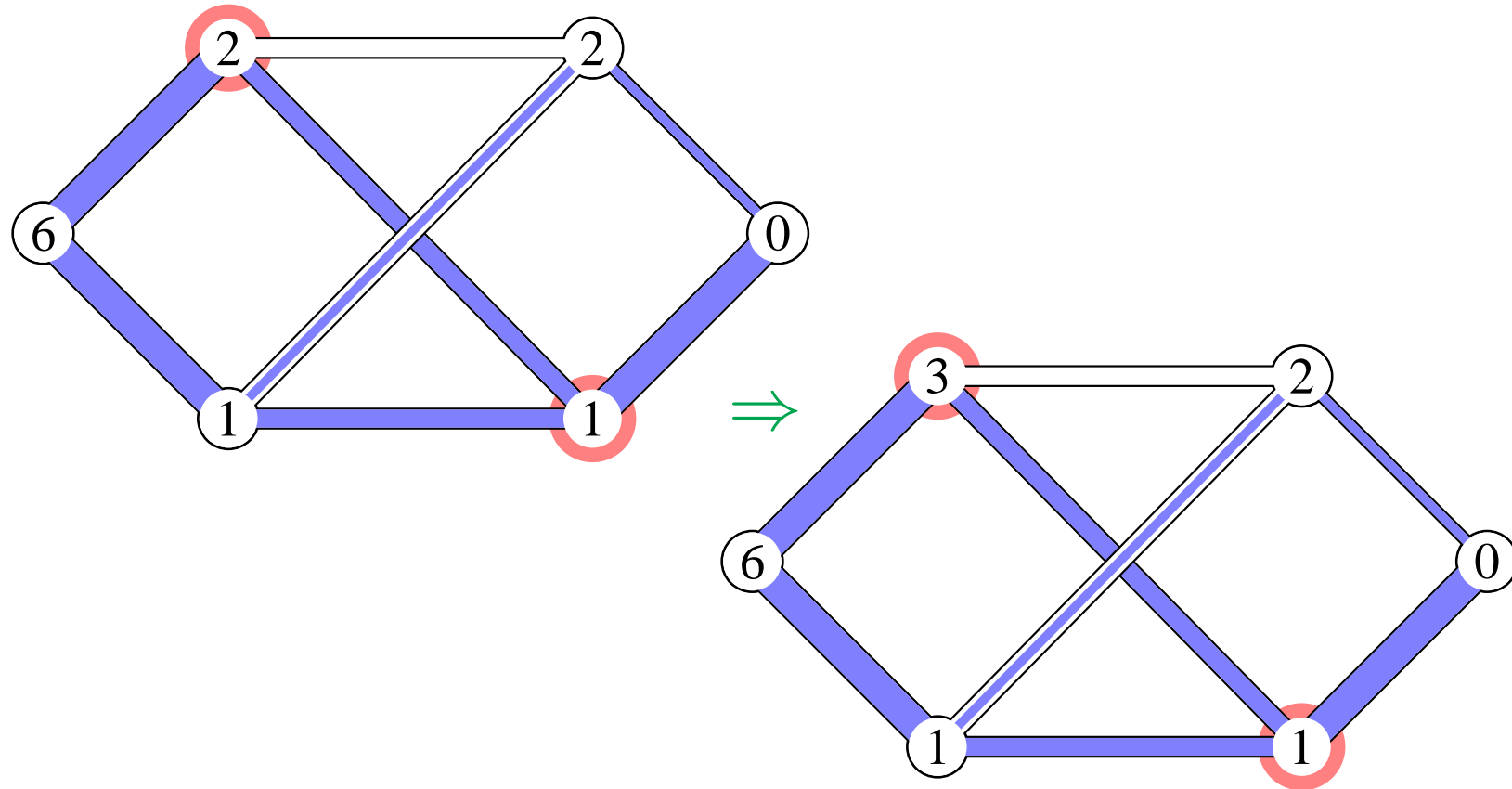
## Preflow-Push-Algorithmen



Es wurde ein saturierter Push durchgeführt.

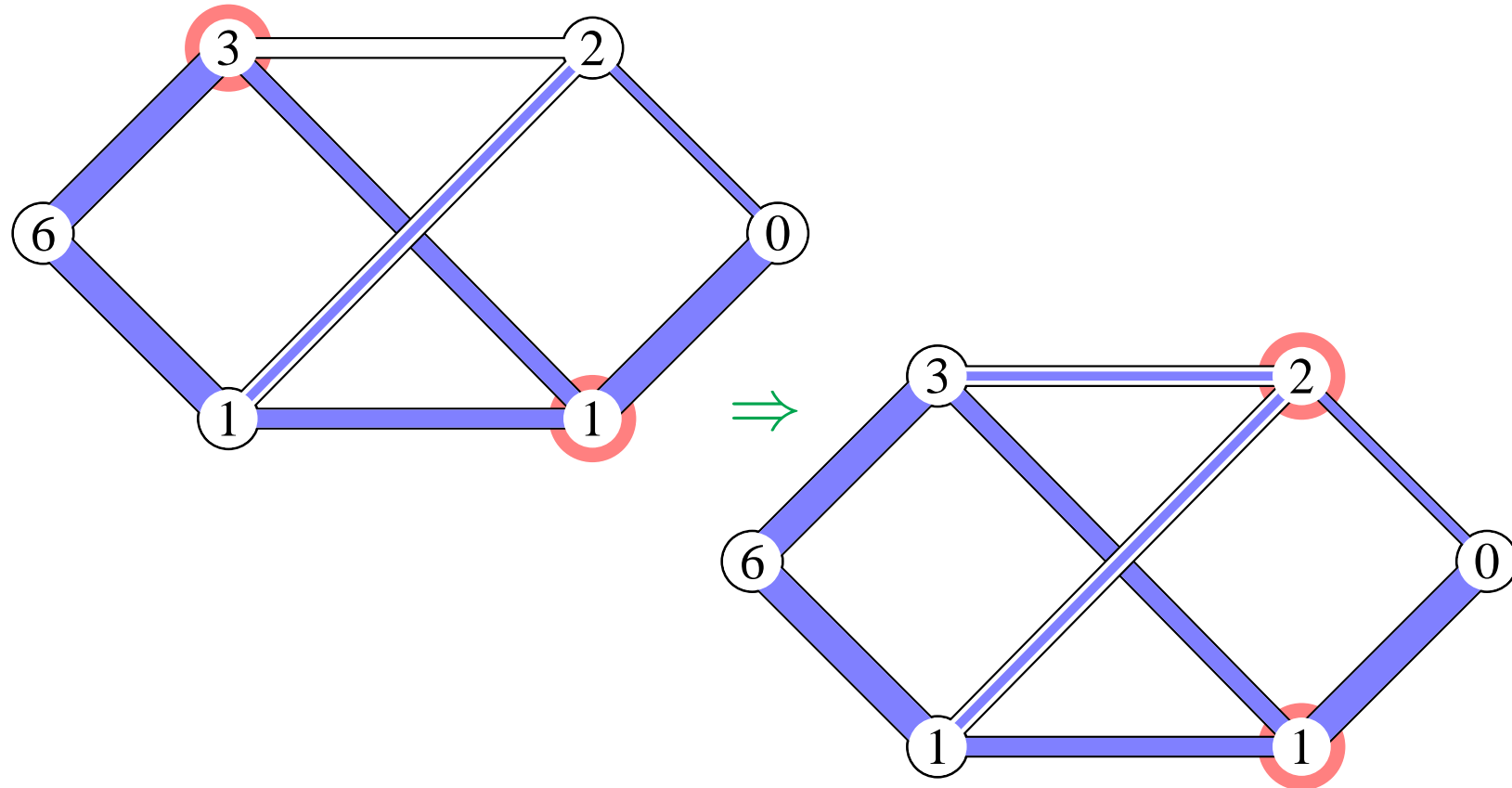
Dadurch gibt es jetzt zwei überfließende Knoten.

## Preflow-Push-Algorithmen



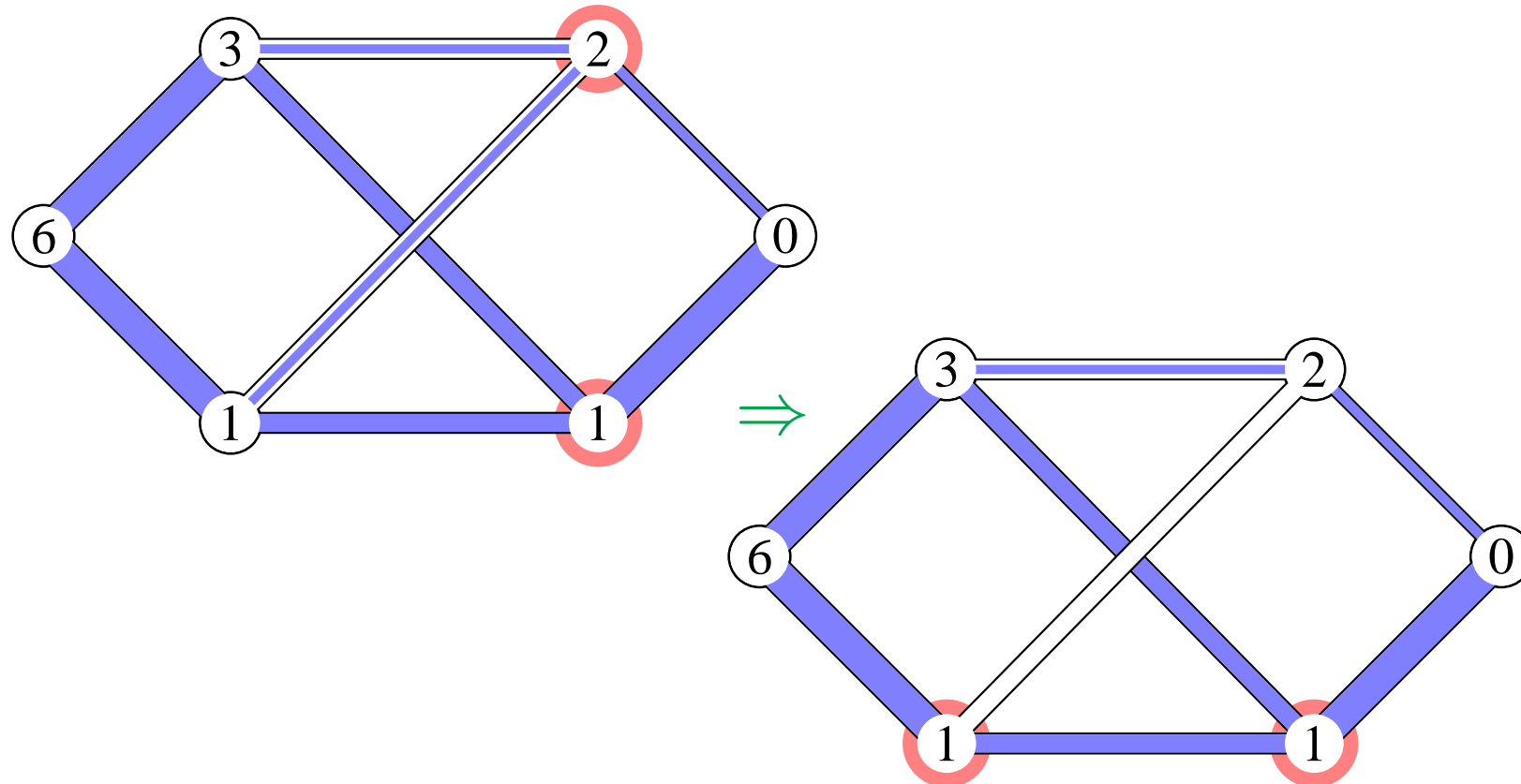
Ein Knoten wurde auf Höhe 3 geliftet.

## Preflow-Push-Algorithmen



Es wurde ein nicht-saturierter Push durchgeführt.

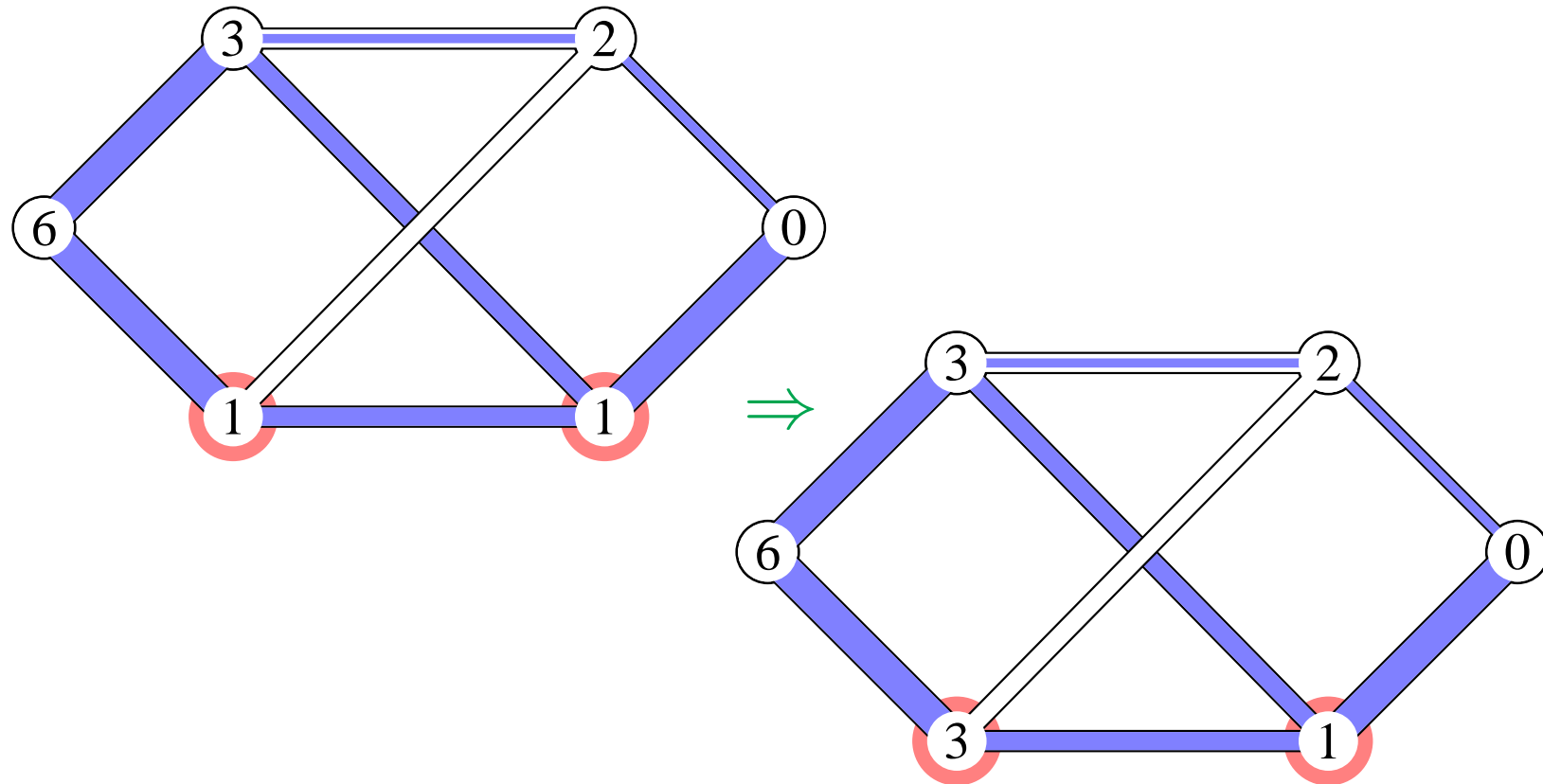
## Preflow-Push-Algorithmen



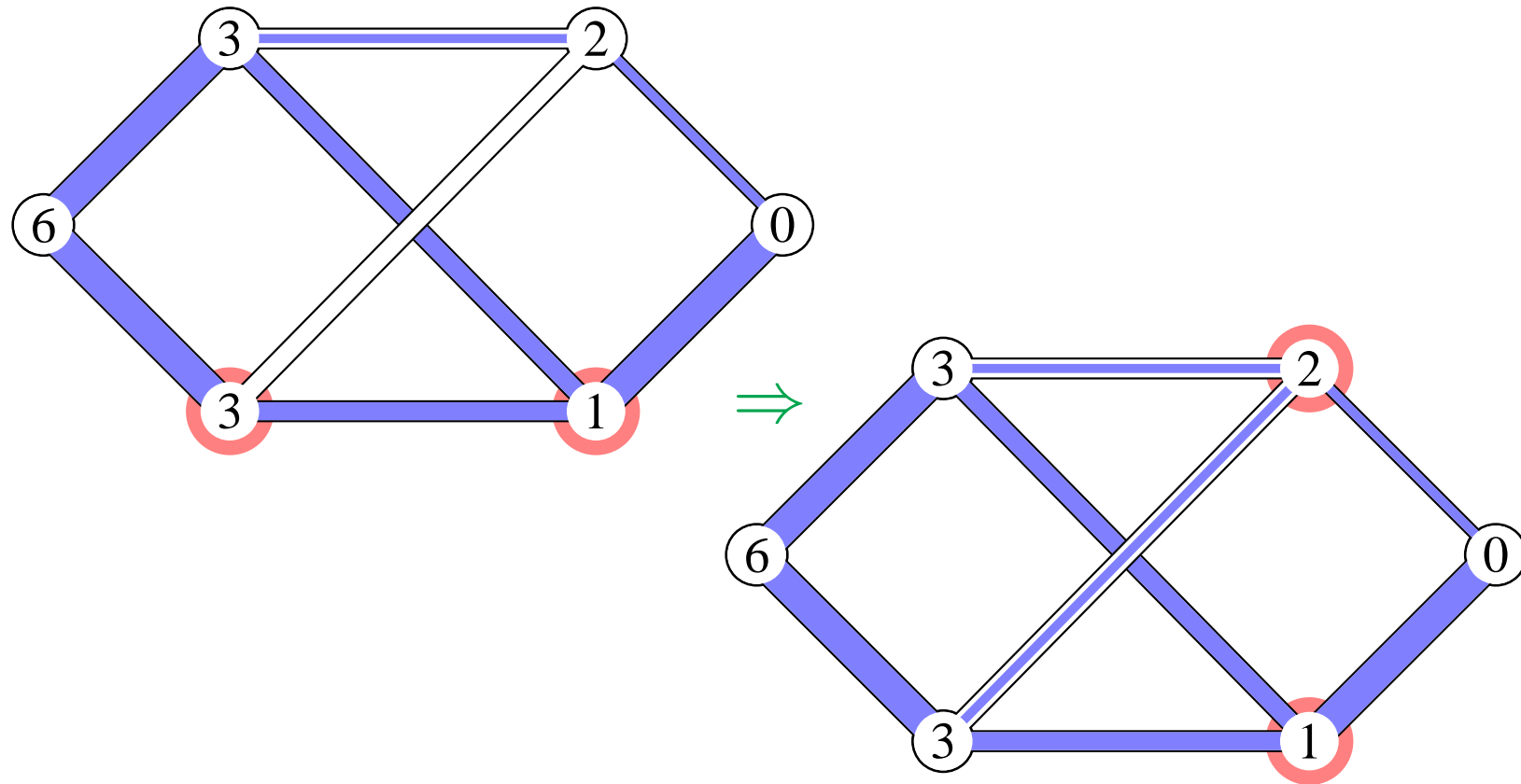
Es wurde ein saturierter Push durchgeführt.



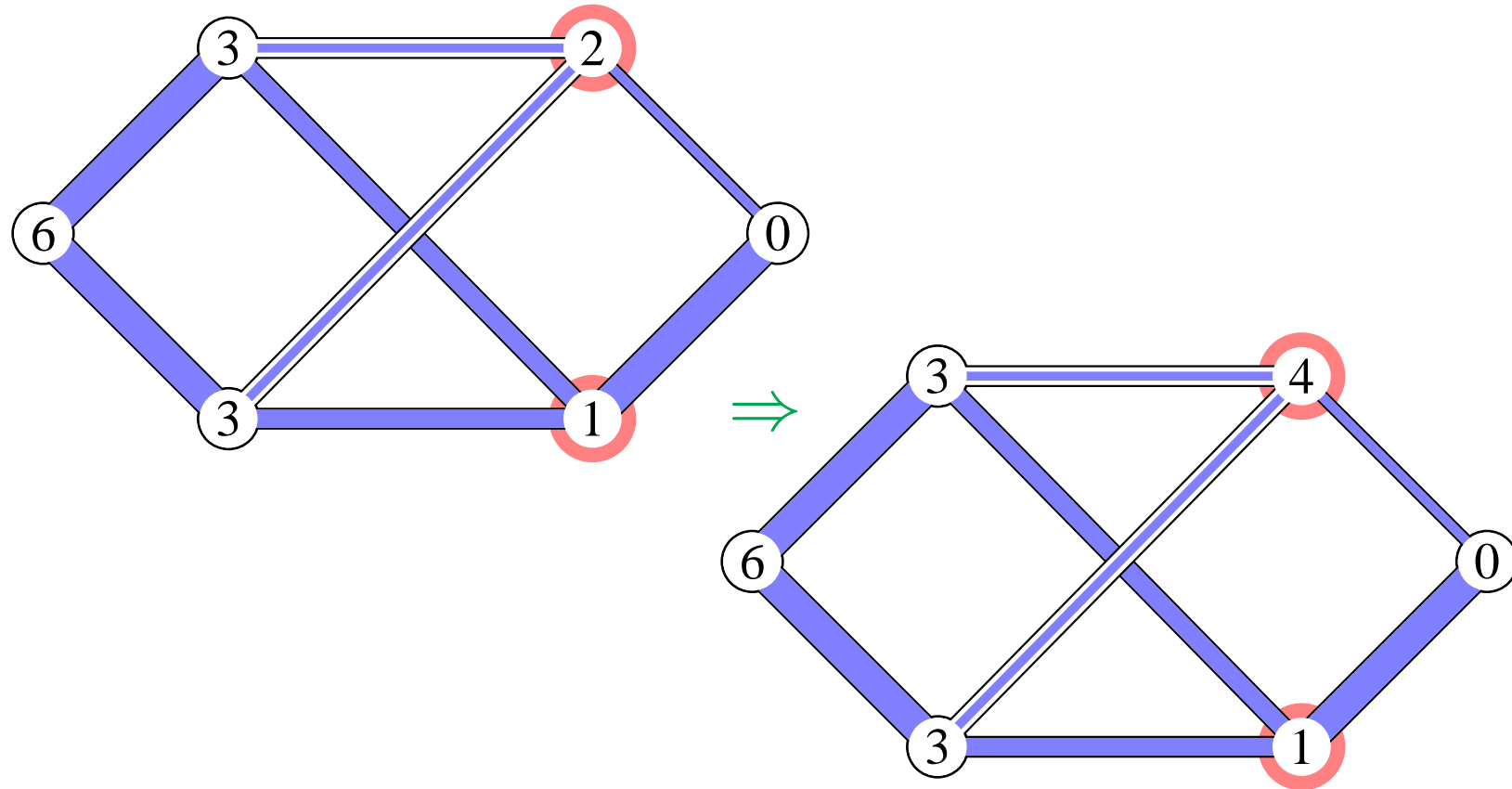
## Preflow-Push-Algorithmen



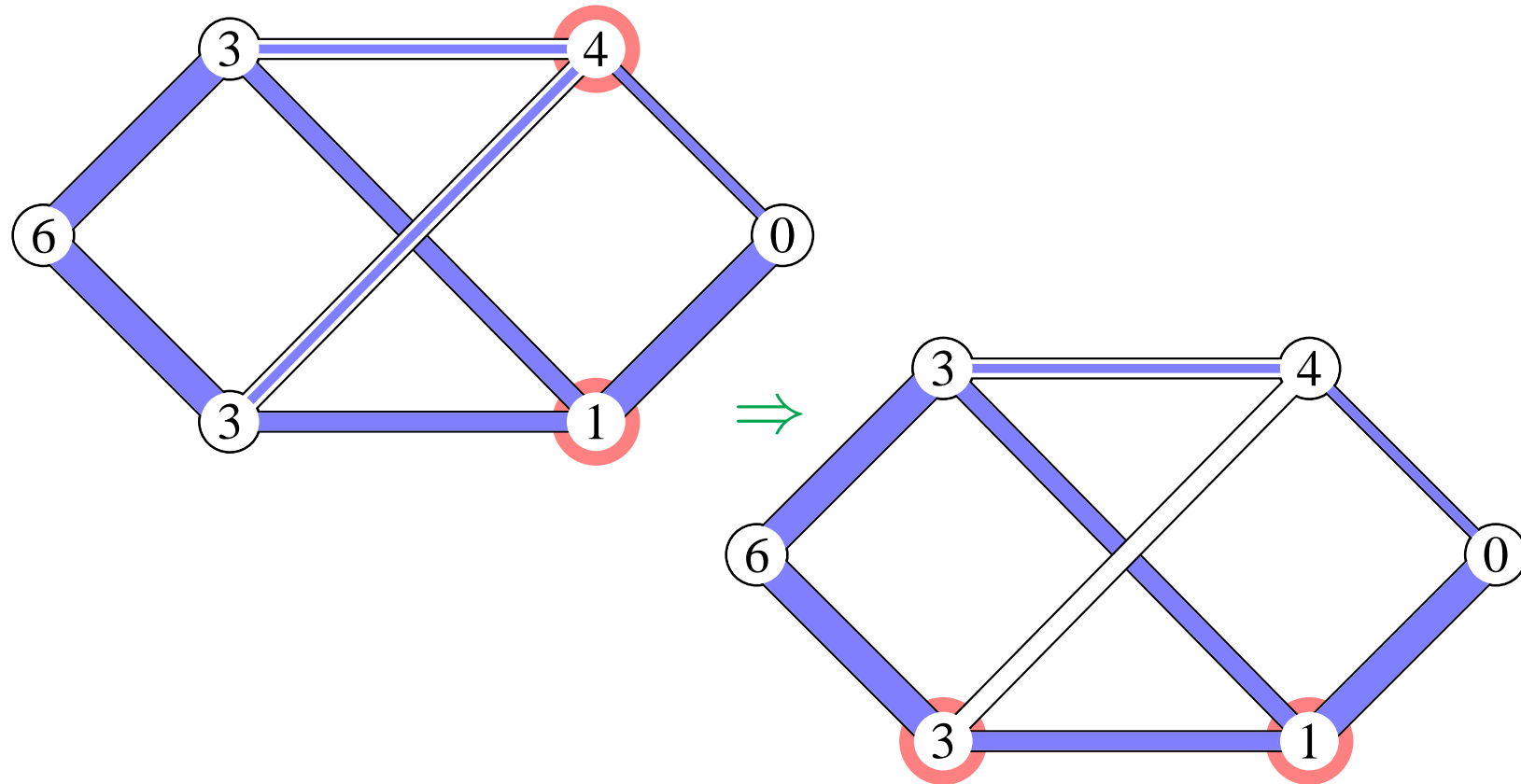
## Preflow-Push-Algorithmen



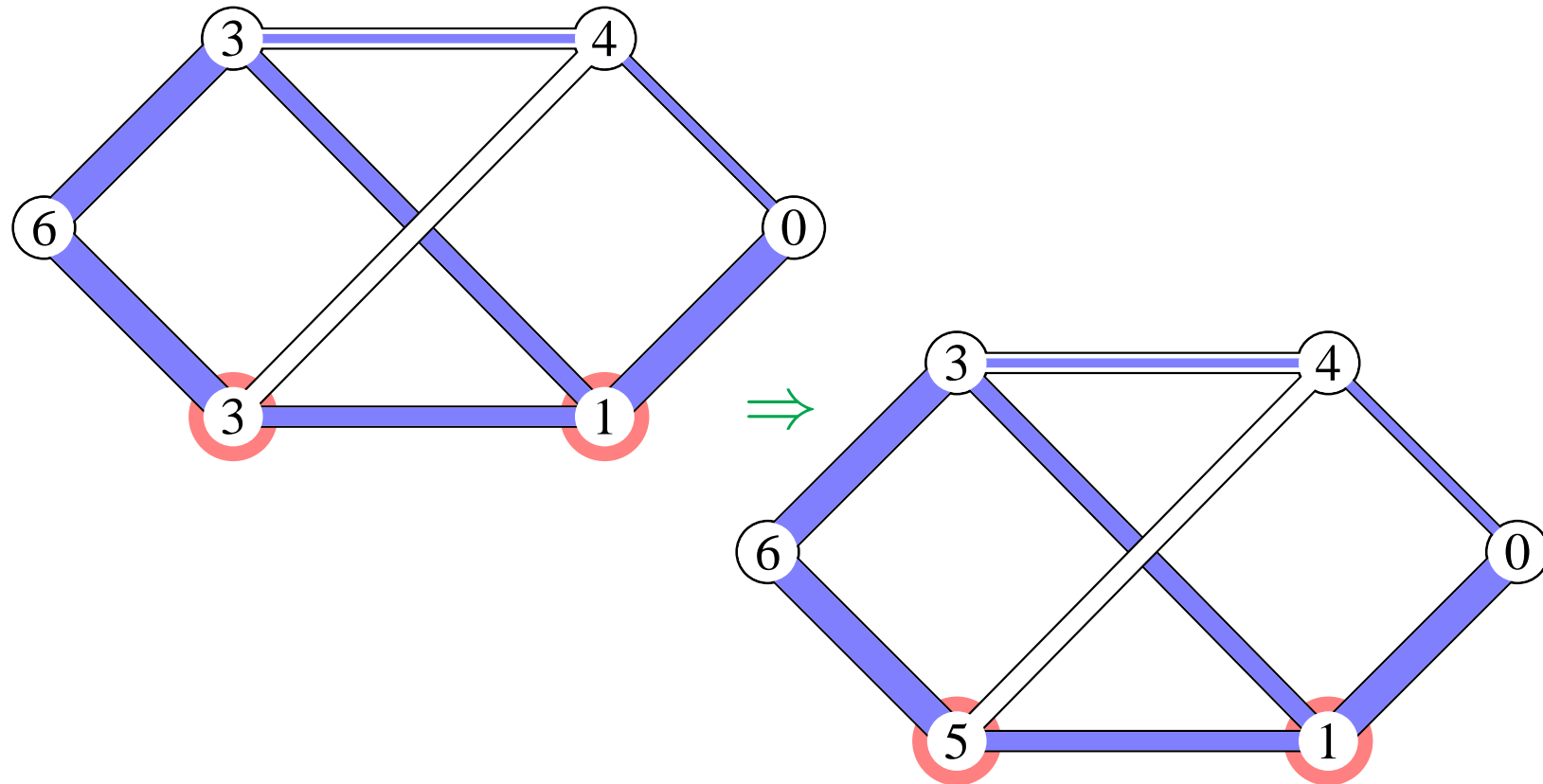
## Preflow-Push-Algorithmen



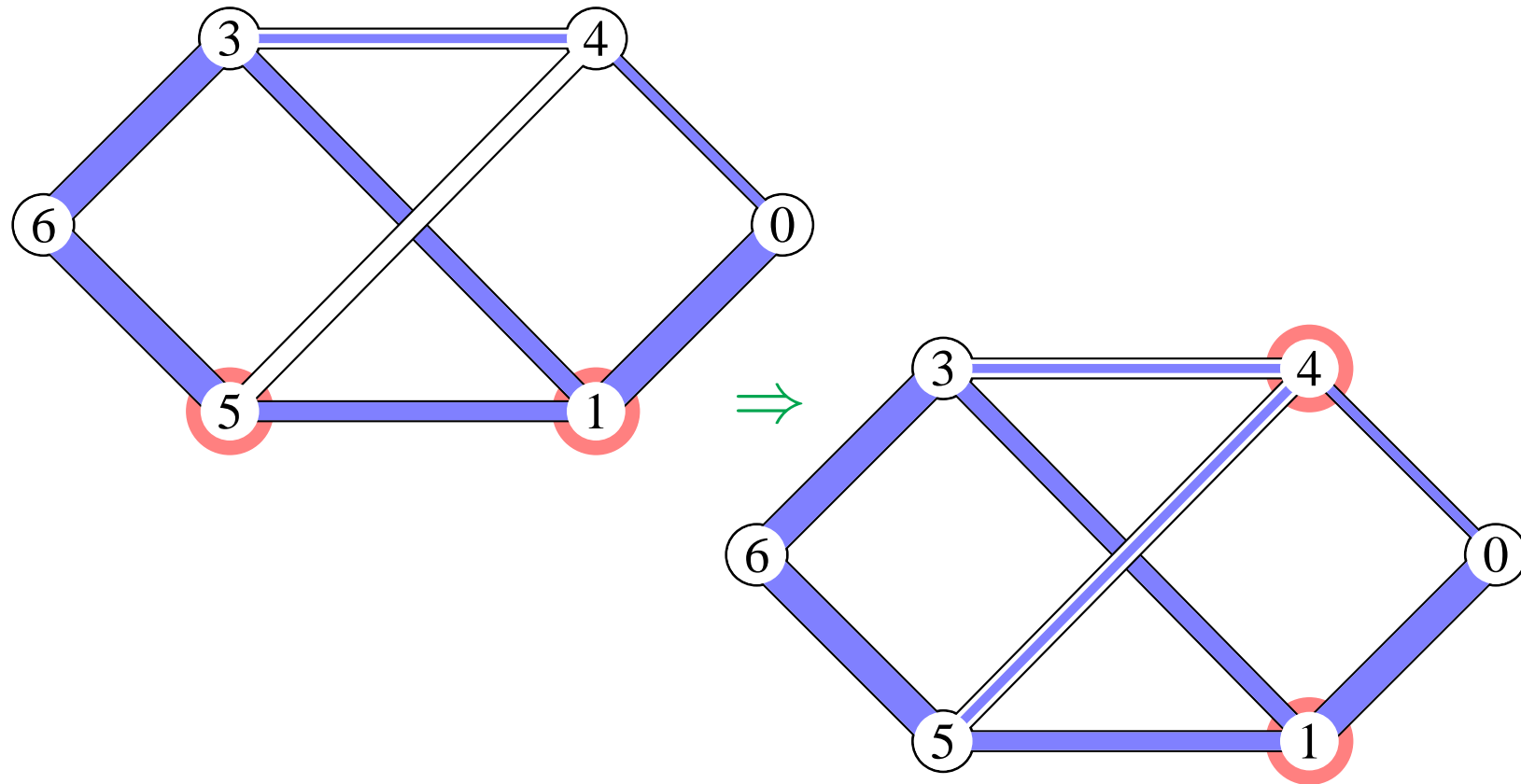
## Preflow-Push-Algorithmen



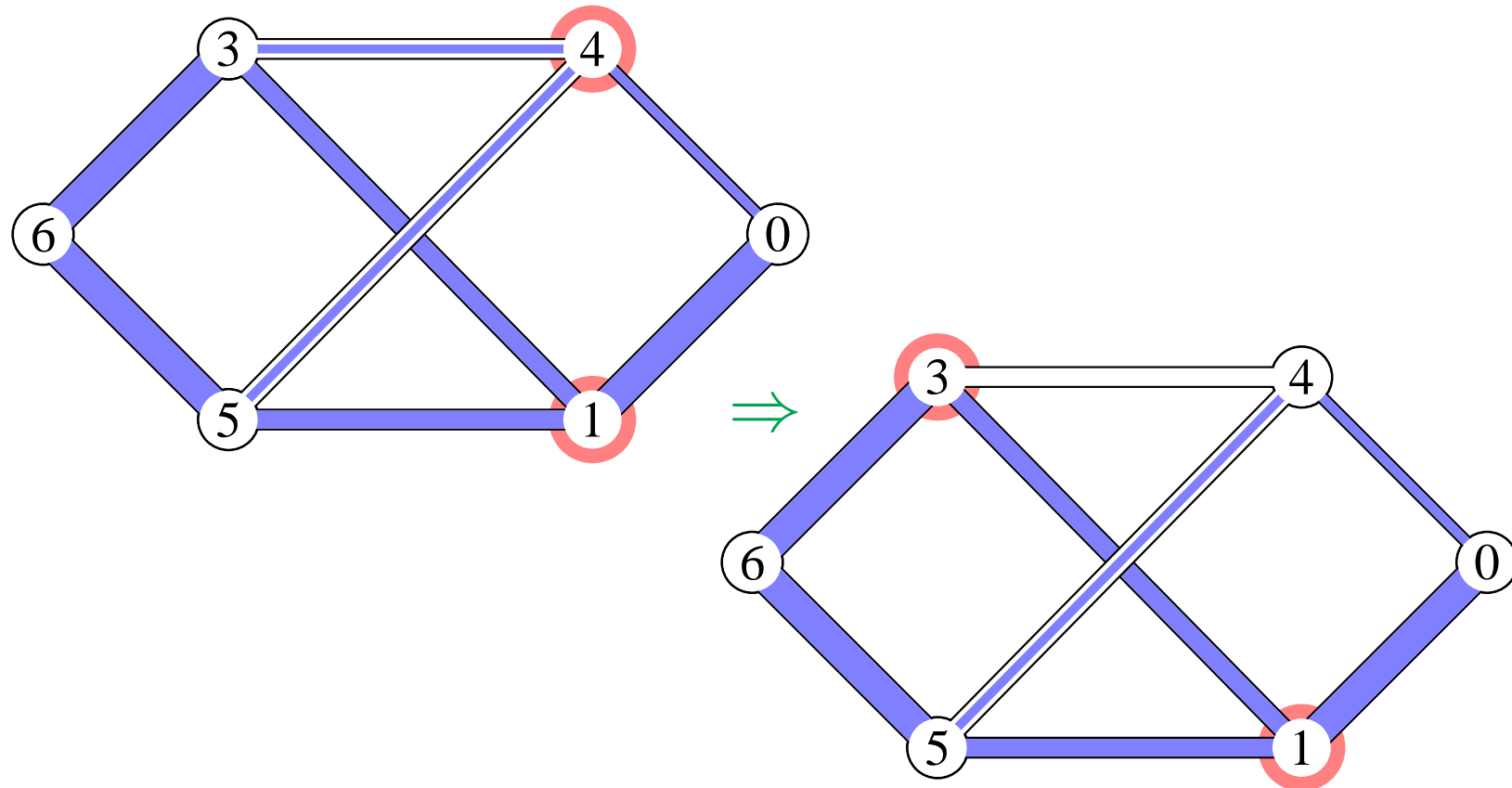
## Preflow-Push-Algorithmen



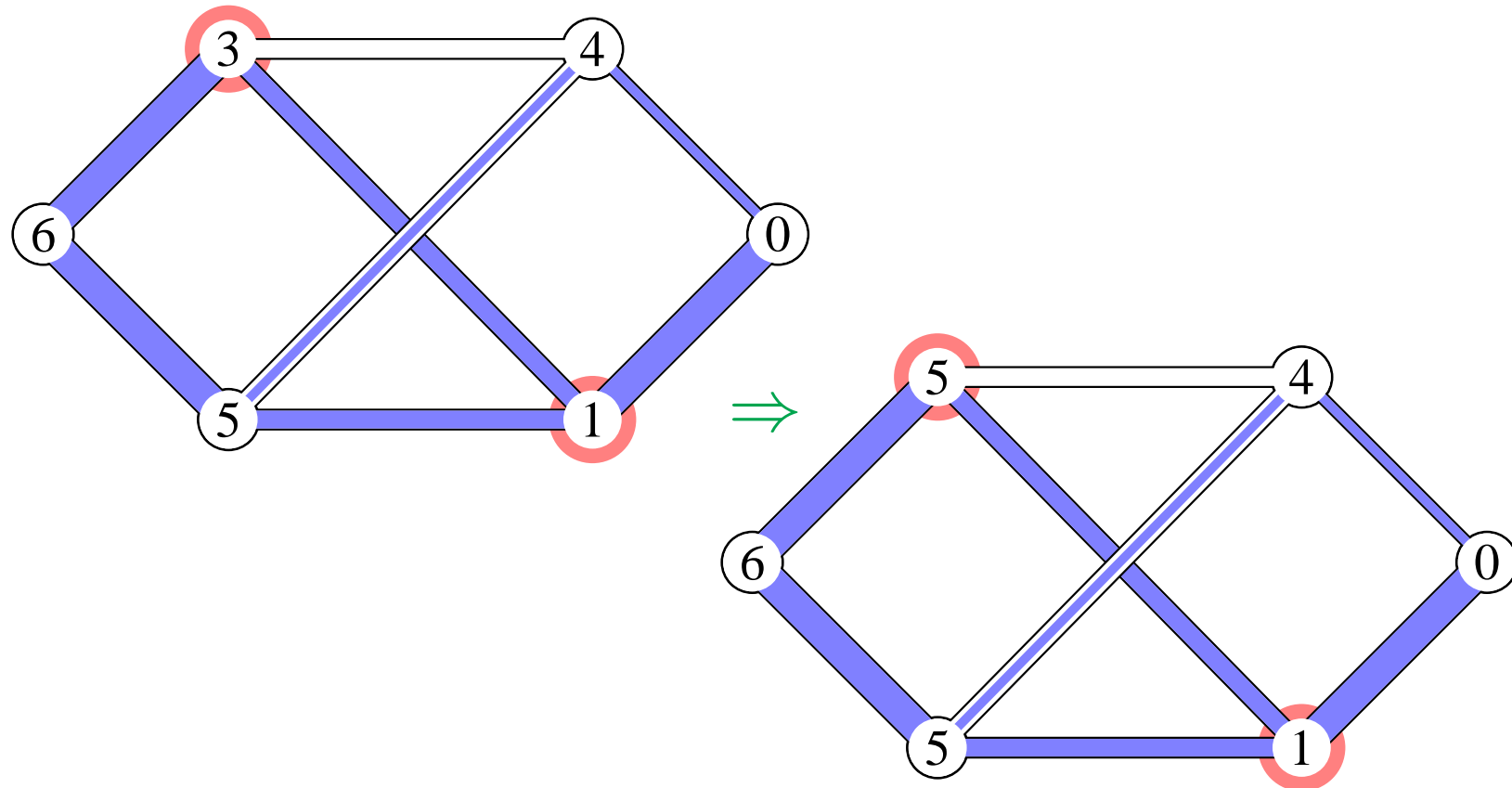
## Preflow-Push-Algorithmen



## Preflow-Push-Algorithmen

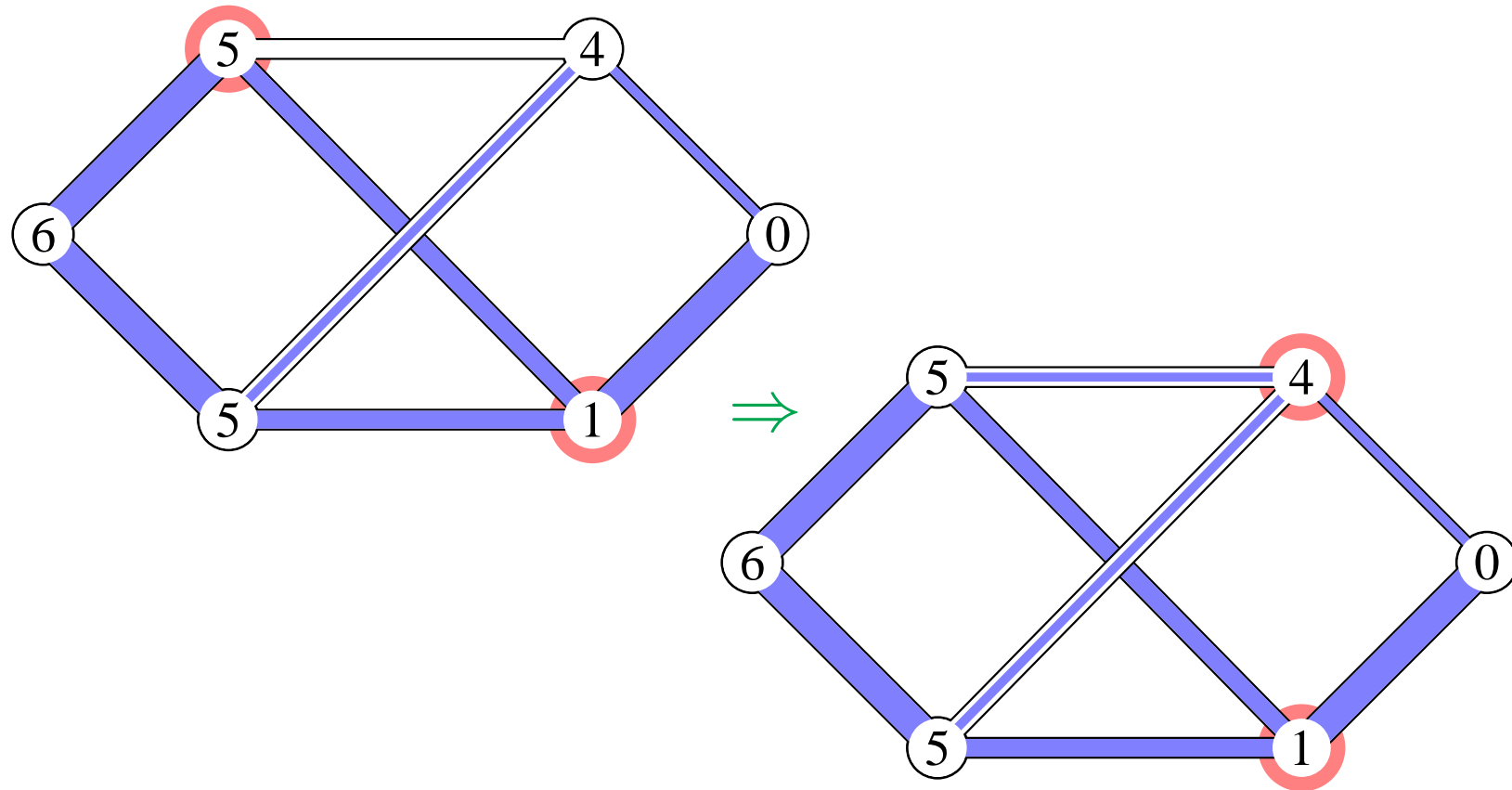


## Preflow-Push-Algorithmen

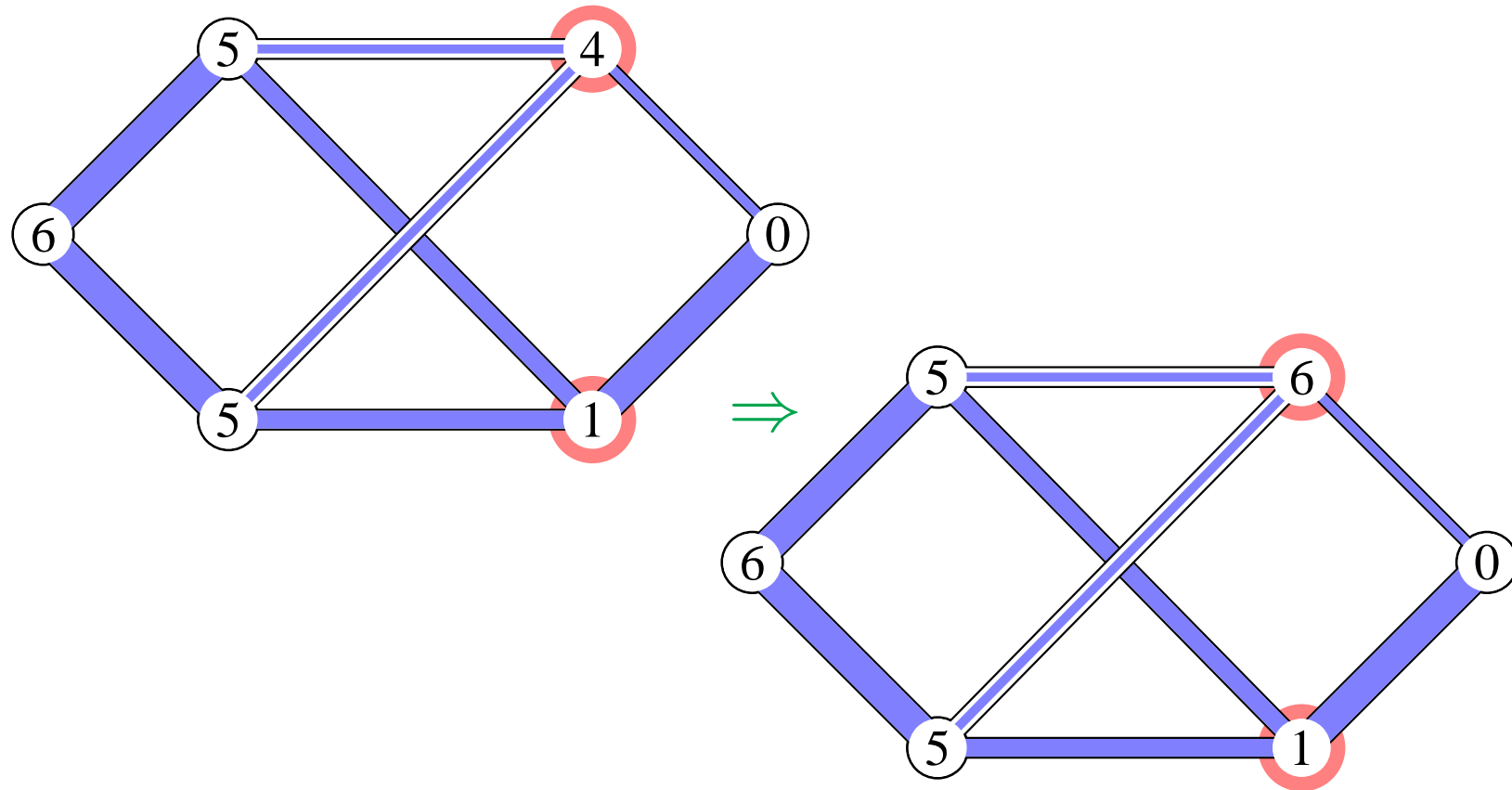




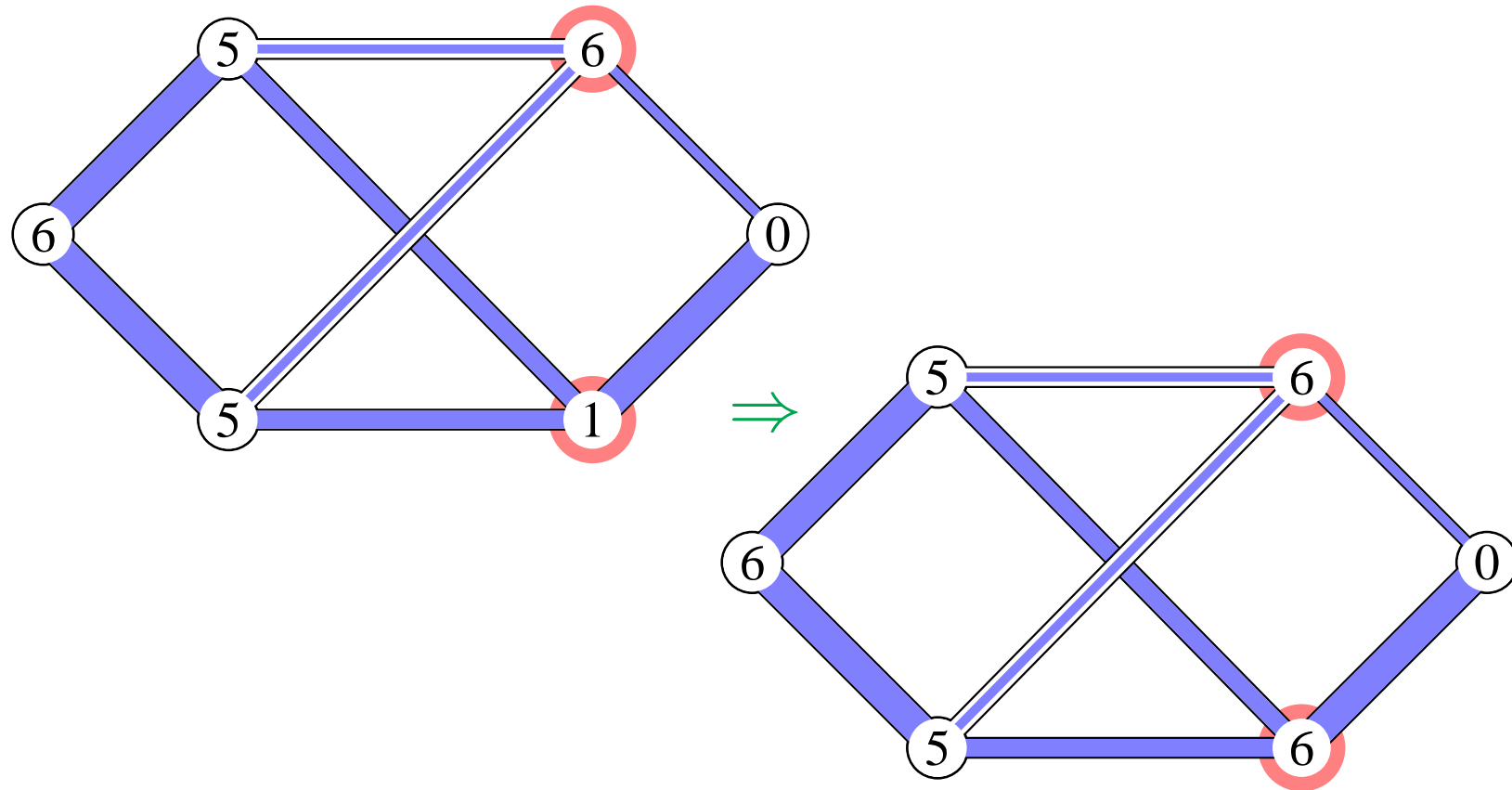
## Preflow-Push-Algorithmen



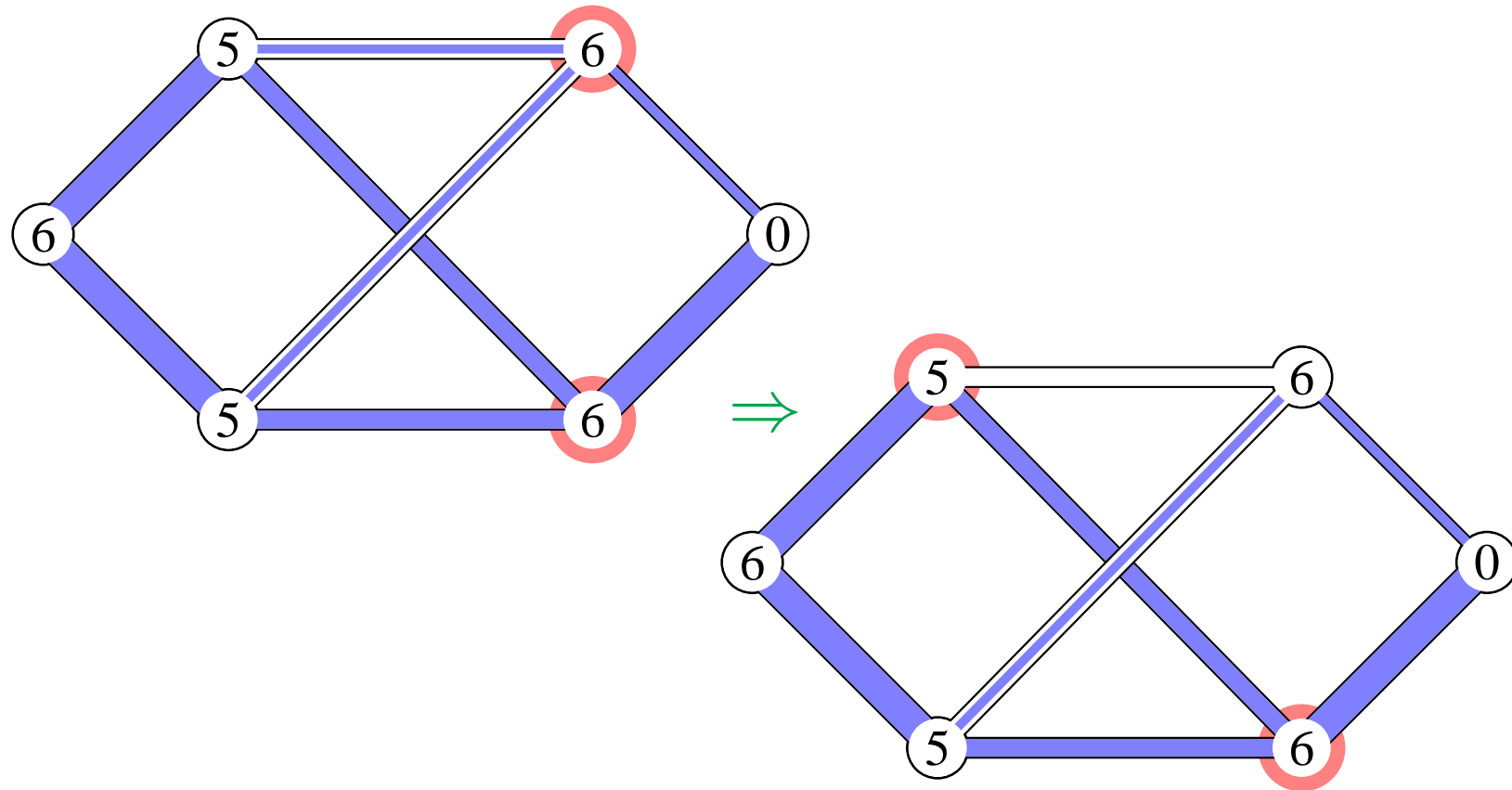
## Preflow-Push-Algorithmen



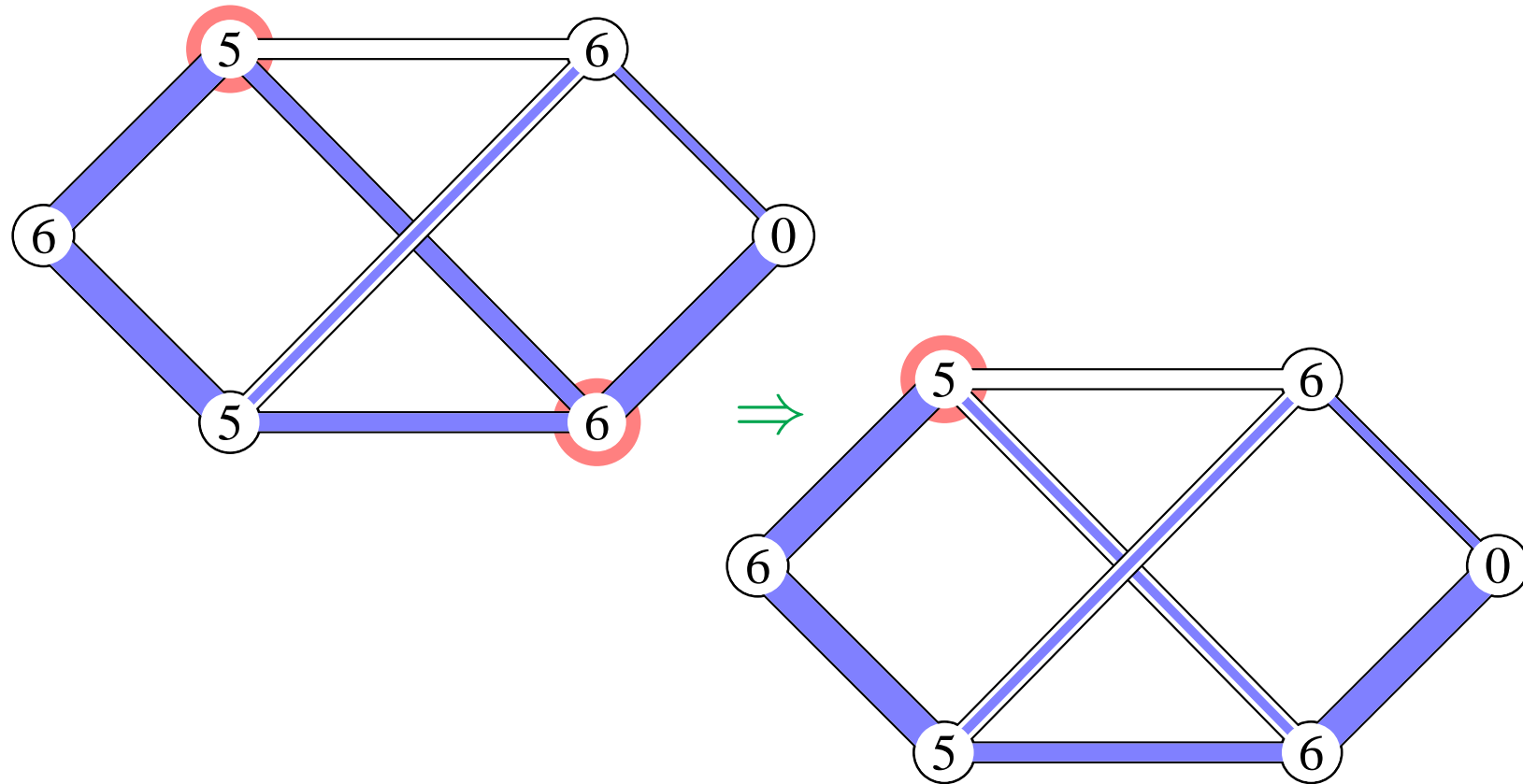
## Preflow-Push-Algorithmen



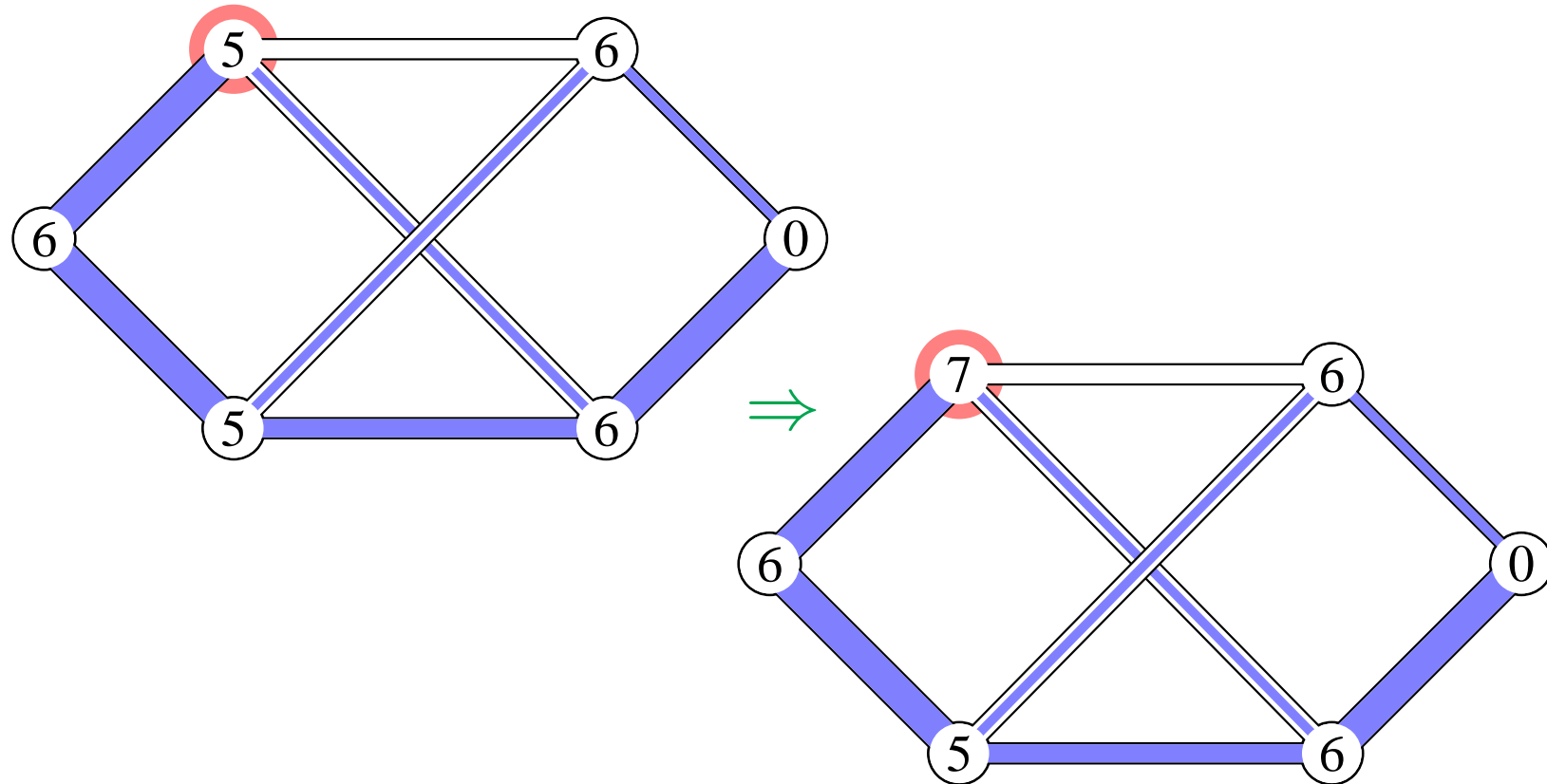
## Preflow-Push-Algorithmen



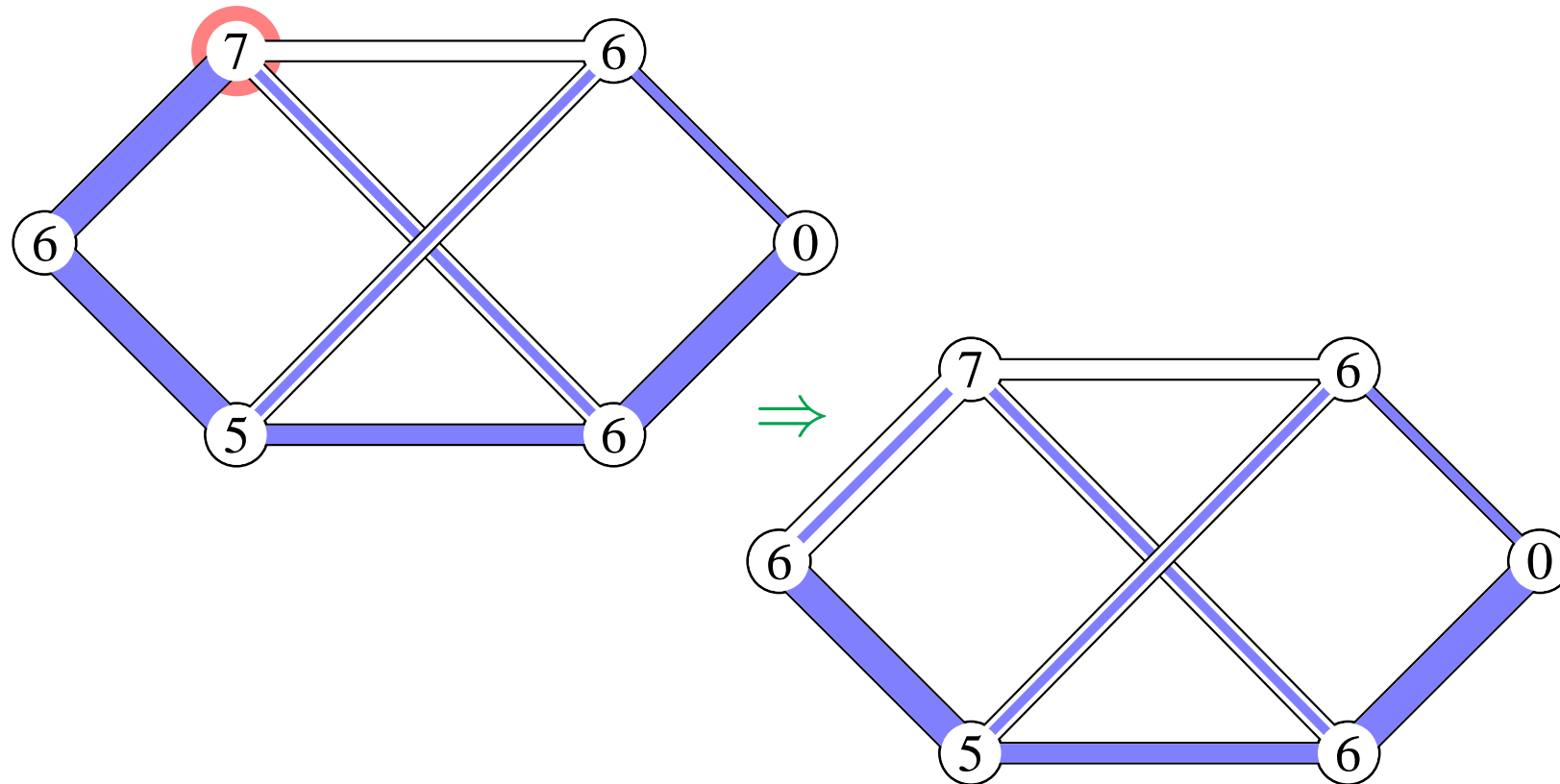
## Preflow-Push-Algorithmen



## Preflow-Push-Algorithmen



## Preflow-Push-Algorithmen



- Es gibt keinen überfließenden Knoten mehr.
- Der „preflow“ ist jetzt ein echter (maximaler) Fluß.

## Preflows

Ein *preflow* ist eine Funktion  $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ , die Paare von Knoten auf reelle Zahlen abbildet und diese Bedingungen erfüllt:

- *Zulässigkeit*: Für  $u, v \in V$  gilt  $f(u, v) \leq c(u, v)$ .
- *Symmetrie*: Für  $u, v \in V$  gilt  $f(u, v) = -f(v, u)$ .
- *statt Flußerhaltung*: Für  $u \in V - \{s, t\}$  gilt  $f(V, u) \geq 0$ .

Wir definieren  $e(u) = f(V, u)$ , den *Exzeß* von  $u$ .

Falls  $e(u) > 0$  dann ist  $u$  *überfließend*.



## Höhenfunktionen

### Definition

Sei  $G = (V, E)$  ein  $s$ - $t$ -Netzwerk und  $f$  ein Preflow auf  $G$ .

Eine Funktion  $h: V \rightarrow \mathbf{N}$  ist eine *Höhenfunktion*, wenn

- $h(s) = |V|$
- $h(t) = 0$
- $h(u) \leq h(v) + 1$  für alle  $(u, v) \in E_f$

„Eine Kante im Residualnetzwerk führt höchstens um 1 nach unten.“

## Die Push-Operation $PUSH(u, v)$

Vorbedingungen:

- $e(u) > 0$
- $c_f(u, v) > 0$
- $h(u) = h(v) + 1$

$$d_f(u, v) := \min\{e(u), c_f(u, v)\}$$

$$f(u, v) := f(u, v) + d_f(u, v)$$

$$f(v, u) := -f(u, v)$$

$$e(u) := e(u) - d_f(u, v)$$

$$e(v) := e(v) + d_f(u, v)$$

## Die Lift-Operation $LIFT(u)$

Vorbedingungen:

- $e(u) > 0$
- $h(u) \leq h(v)$  falls  $(u, v) \in E_f$

$$h(u) := 1 + \min\{ h(v) \mid (u, v) \in E_f \}$$

## Der einfache Preflow-Push-Algorithmus

Eingabe: Ein  $s$ - $t$ -Netzwerk  $G = (V, E)$

```
for each  $u \in V$  do  $h(u) := 0, e(u) := 0$   
 $h(s) := |V|$   
for each  $(u, v) \in E$  do  $f(u, v) := 0, f(v, u) := 0$   
for each  $u \in \{u \mid (s, u) \in E\}$  do  
     $f(s, u) := c(s, u)$   
     $f(u, s) := -c(s, u)$   
     $e(u) := c(s, u)$   
while es gibt eine anwendbare Lift-  
    oder Push-Operation do  
    wähle eine Operation aus und wende sie an  
return  $f$ 
```

## Korrektheit

### Lemma E

Während der Ausführung des Preflow-Push-Algorithmus ist  $h$  eine Höhenfunktion.

### Beweis

Induktion über Anzahl der Operationen.

Anfangs führen keine Kanten nach unten ausser von  $s$ . Diese sind aber keine Residualkanten.

**Beweis** (Fortsetzung)

1. *LIFT*( $u$ ): Es gibt kein Problem mit einer Kante, wenn ihr **Endpunkt** gehoben wird.

Sei also  $(u, v) \in E_f$ . Vorher galt  $h(u) \leq h(v)$ . Danach muß  $h(u) \leq h(v) + 1$  gelten.

2. *PUSH*( $u, v$ ): Es kann eine neue Kante  $(v, u) \in E_f$  entstehen. Vorher galt aber  $h(u) = h(v) + 1$ , also führt die neue Kante sogar um eins nach **oben**.

## Korrektheit

### Lemma F

Sei  $G = (V, E)$  ein  $s$ - $t$ -Netzwerk,  $f$  ein Preflow und  $h$  eine Höhenfunktion auf  $G$ .

Dann gibt es keinen  $s$ - $t$ -Pfad in  $G_f$ .

### Beweis

Gäbe es einen  $s$ - $t$ -Pfad, hätte er höchstens Länge  $|V| - 1$ . Jede Kante führt um höchstens eins nach unten. Es startet auf Höhe  $|V|$ .

Also kann er nicht auf Höhe 0 enden. Widerspruch.

## Korrektheit

### Theorem

Der Preflow-Push-Algorithmus berechnet einen maximalen Fluß, falls er terminiert.

### Beweis

Wenn er terminiert, gibt es keine überfließende Knoten. Also ist der Preflow sogar ein Fluß.

Wegen Lemma F gibt es keinen augmentierenden Pfad. Also ist der Fluß gemäß Min-Cut-Max-Flow-Theorem maximal.  $\square$