

Max-flow Min-cut Theorem

Theorem

Sei f ein Fluß im s - t -Netzwerk $G = (V, E)$.

Dann sind äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluß
2. In G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad
3. $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T)

Folgerungen

Falls die Ford–Fulkerson–Methode terminiert, berechnet sie einen maximalen Fluß.

Die Kapazität eines kleinsten Schnittes gleicht dem Betrag eines größten Flusses.

Beweis 1. \rightarrow 2.

Sei f ein maximaler Fluß.

Nehmen wir an, es gebe einen augmentierenden Pfad p .

Dann ist $f + f_p$ ein Fluß in G mit $|f + f_p| > |f|$.

Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von f .

Beweis 2. \rightarrow 3.

G_f hat keinen s - t -Pfad.

$S := \{ v \in V \mid \text{es gibt einen } s\text{-}v\text{-Pfad in } G_f \}$

$T := V - S$

Dann ist (S, T) ein Schnitt und es gilt $f(u, v) = c(u, v)$ für alle $u \in S, v \in T$.

Nach Lemma C gilt dann $f(S, T) = c(S, T) = |f|$.

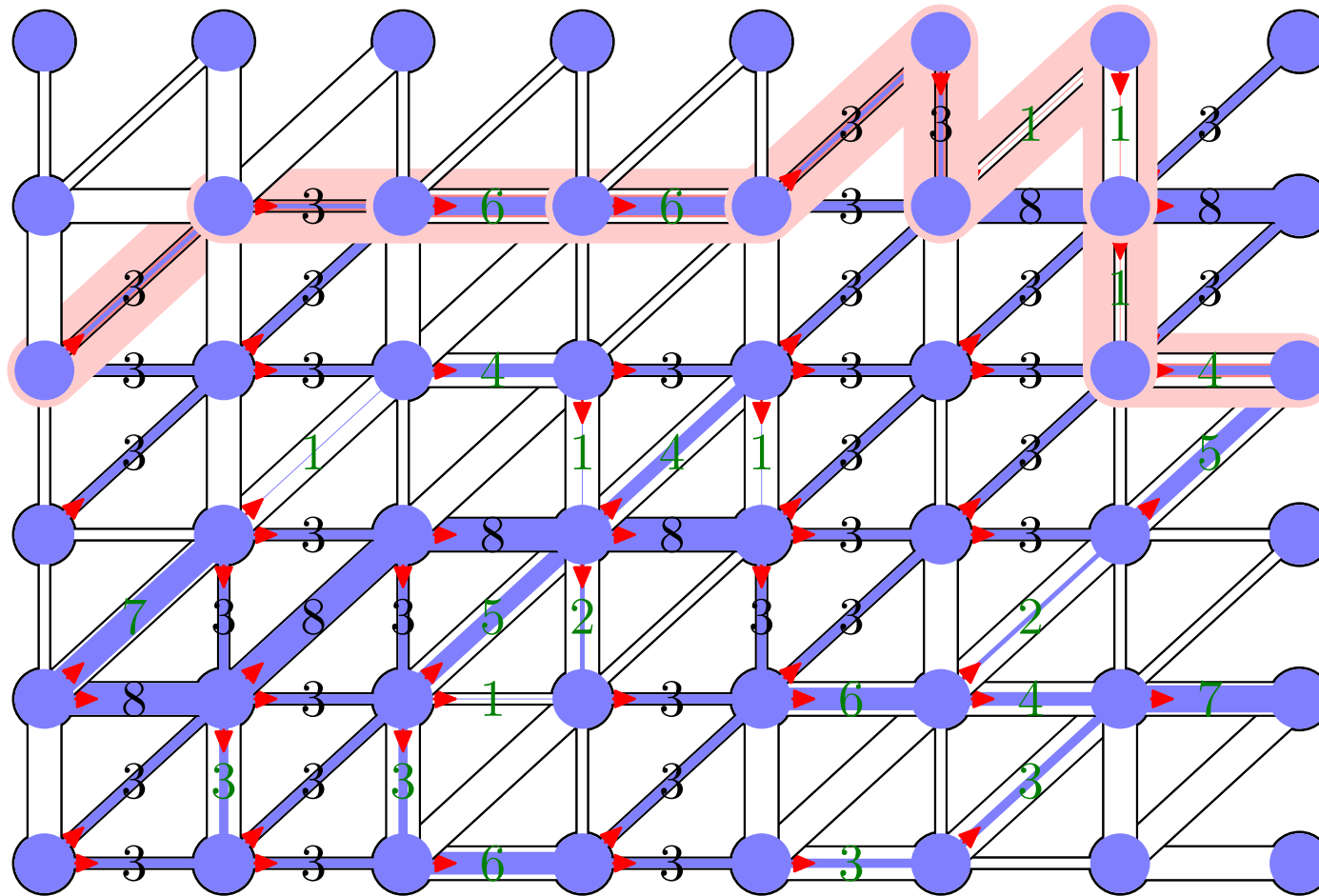
Beweis 3. \rightarrow 1.

Sei f ein beliebiger Fluß.

$$\begin{aligned} |f| &= f(S, T) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) \\ &\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) \\ &= c(S, T) \end{aligned}$$

Der Betrag jedes Flusses ist also höchstens $c(S, T)$. Erreicht er sogar $c(S, T)$ ist er folglich maximal.

Wo ist ein minimaler Schnitt?



Wie findet man einen minimalen Schnitt?

1. Einen maximalen Fluß berechnen.
2. Eine Kante (u, v) ist *kritisch*, wenn $c(u, v) = f(u, v)$.
3. S besteht aus Knoten, die von s aus über unkritische Kanten erreicht werden können.
4. T besteht aus allen anderen Knoten.

Es gibt aber bessere, direkte Methoden!

Ganzzahlige Flüsse

Theorem

Wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind, dann findet die Ford–Fulkerson–Methode einen maximalen Fluß f , so daß alle $f(u, v)$ ganzzahlig sind.

Beweis

Induktion zeigt, daß die Kapazität eines augmentierenden Pfads ganzzahlig ist und $f(u, v)$ stets ganzzahlig bleiben.

Bipartites Matching

Gegeben:

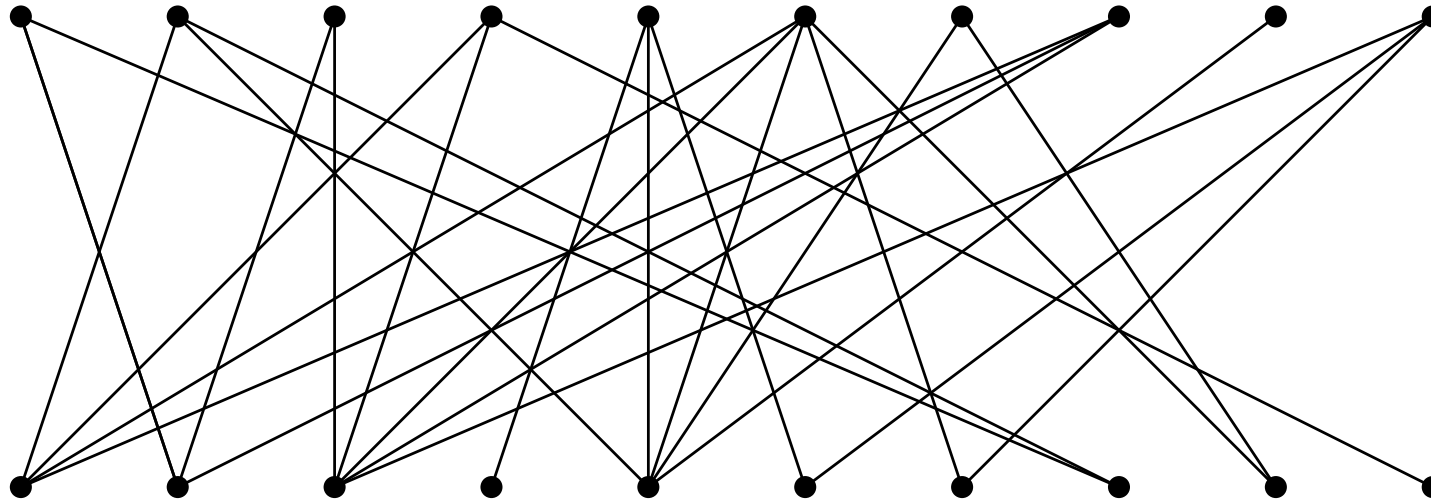
Ein bipartiter, ungerichteter Graph (V_1, V_2, E) .

Gesucht:

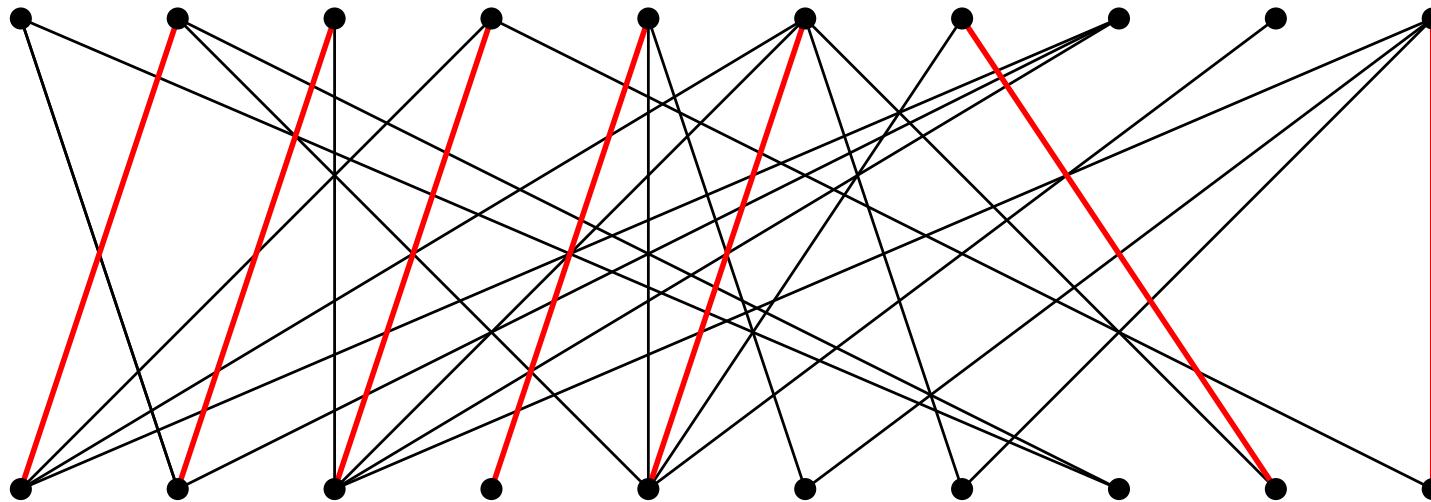
Ein Matching (Paarung) maximaler Kardinalität.

Ein *Matching* ist eine Menge paarweise nicht inzidenter Kanten, also $M \subseteq E$ mit $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2 \Rightarrow m_1 \cap m_2 = \emptyset$.

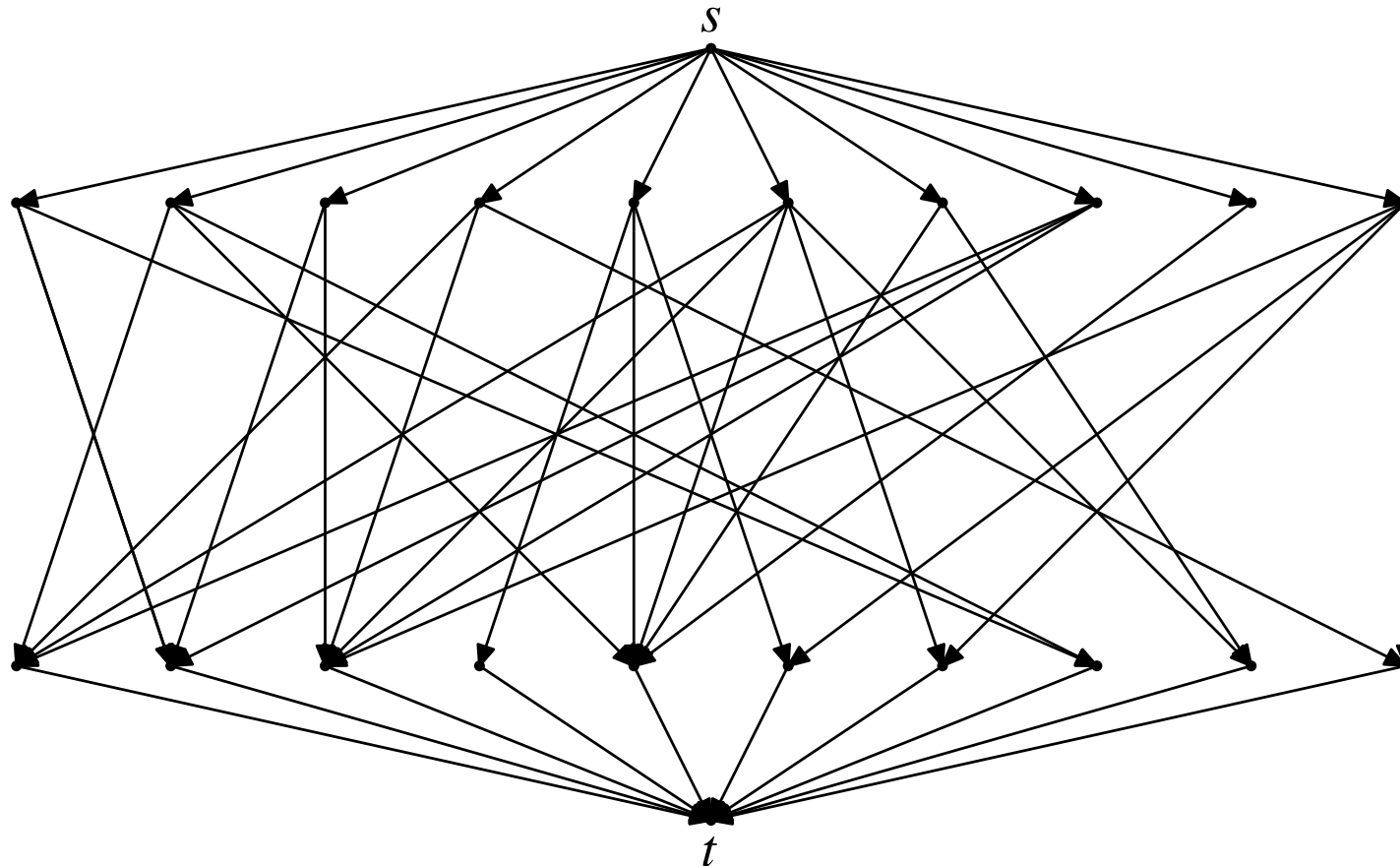
Beispiel



Beispiel

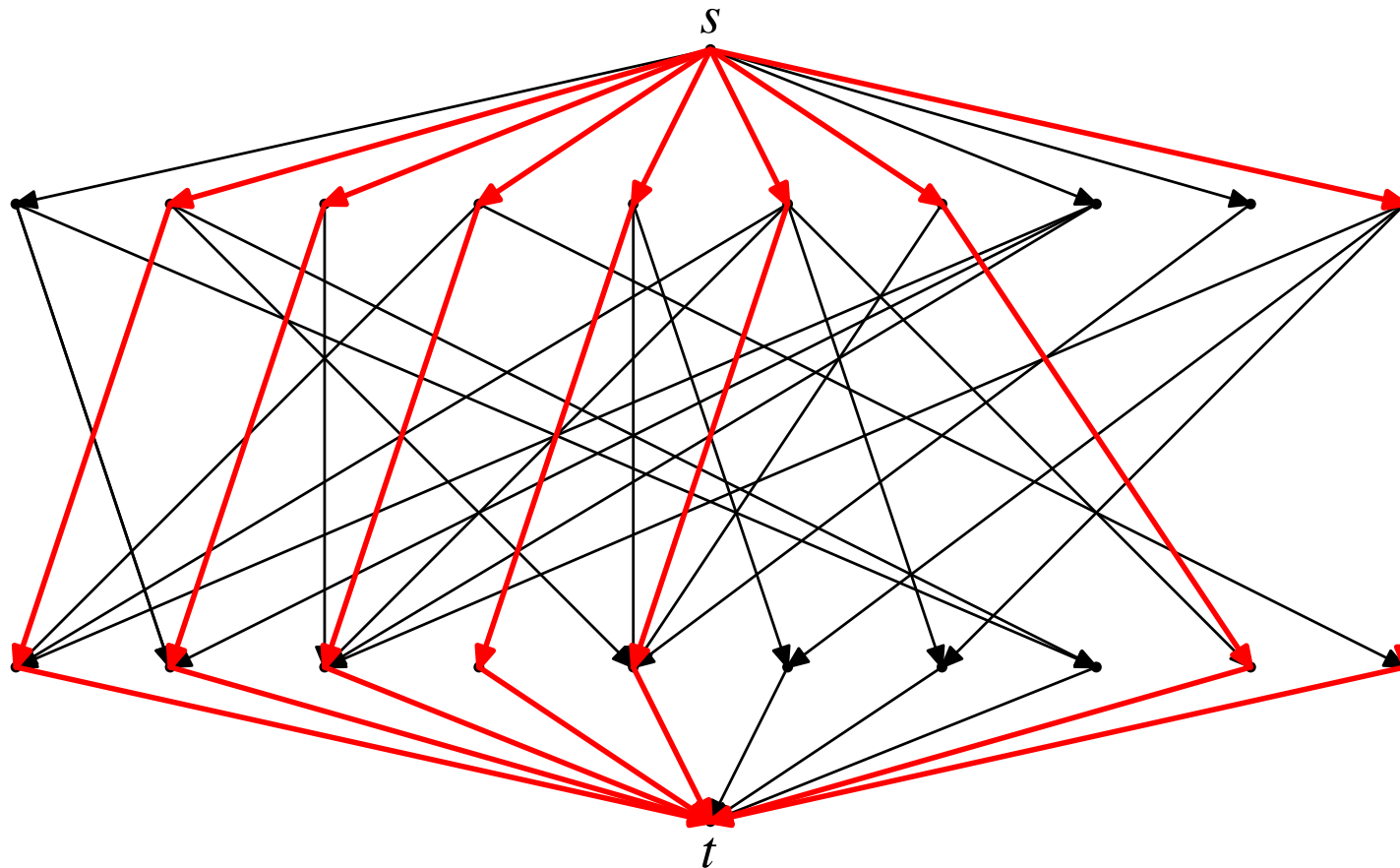


Lösung als Flußproblem

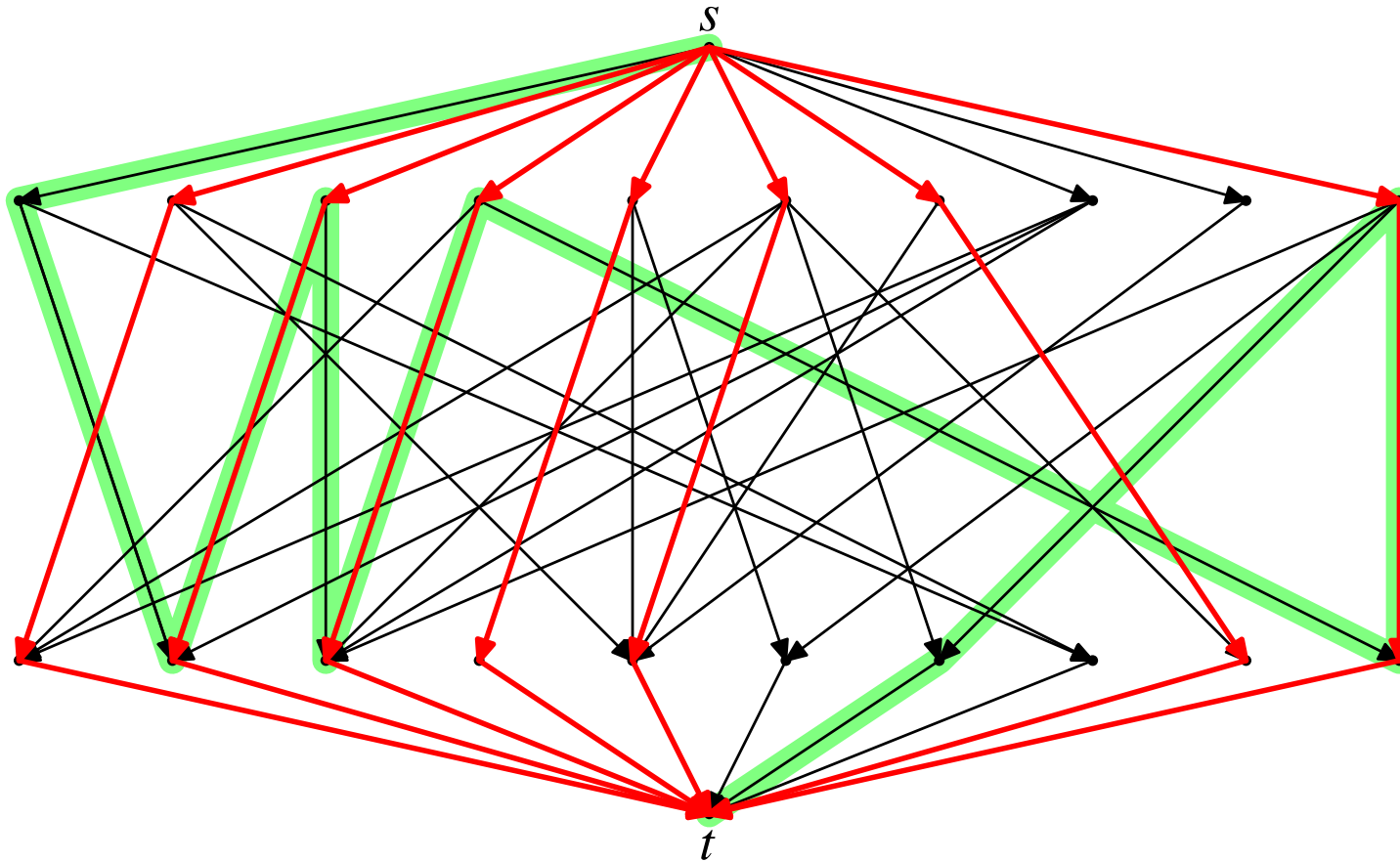


Alle Kapazitäten sind 1. Maximaler **ganzzahliger** Fluß entspricht einem Matching maximaler Kardinalität.

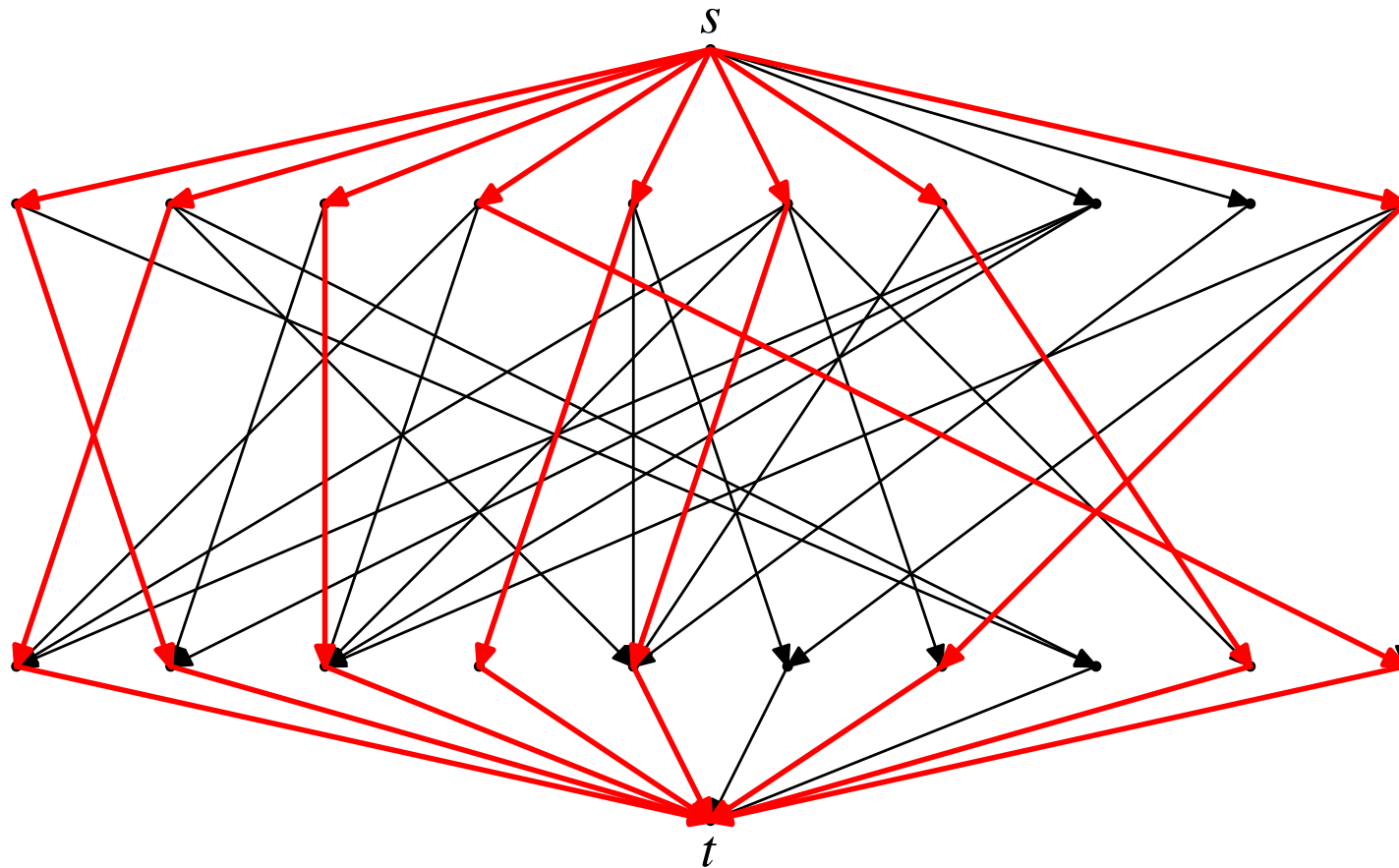
Gibt es einen augmentierenden Pfad?



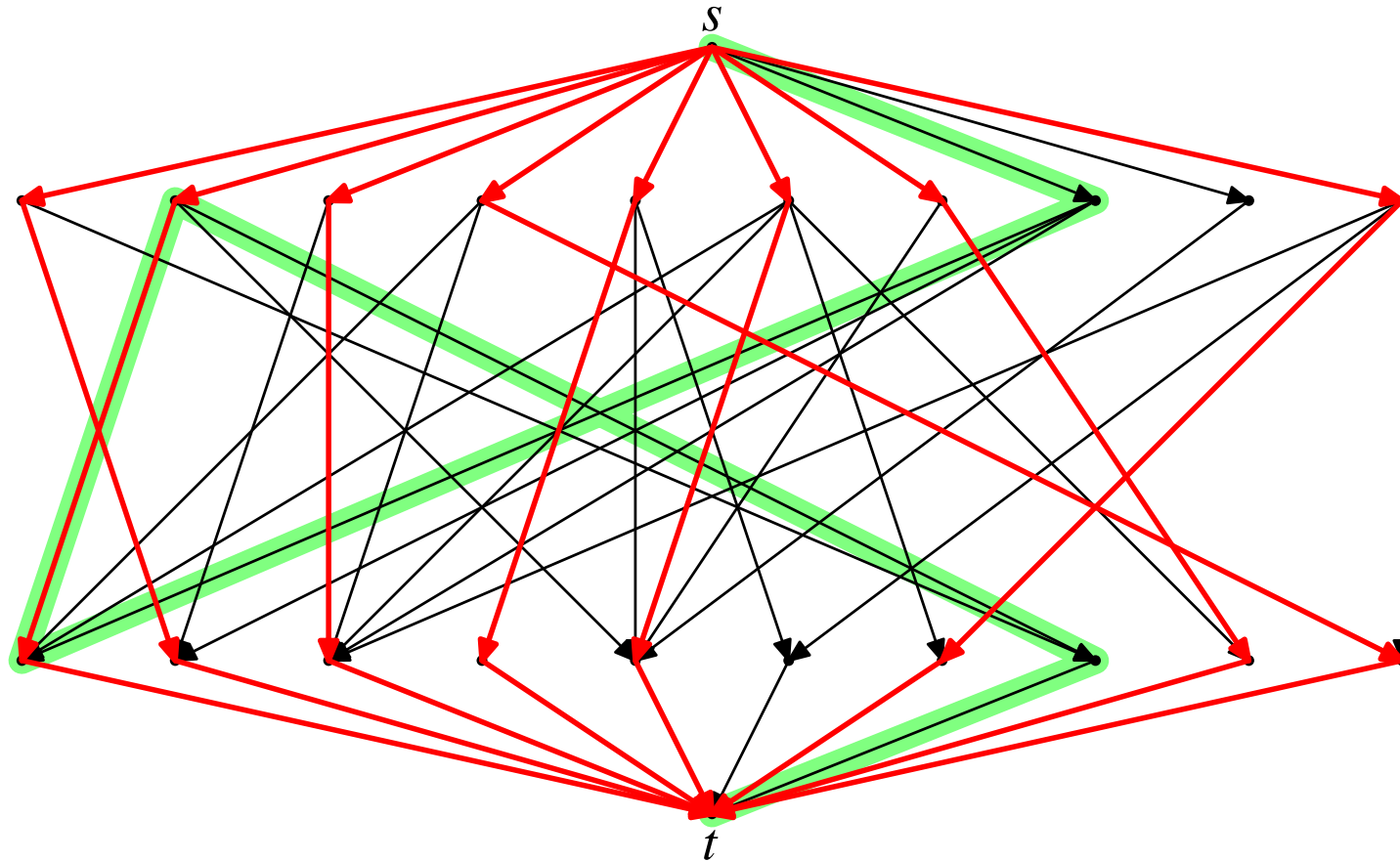
Gibt es einen augmentierenden Pfad? – Ja



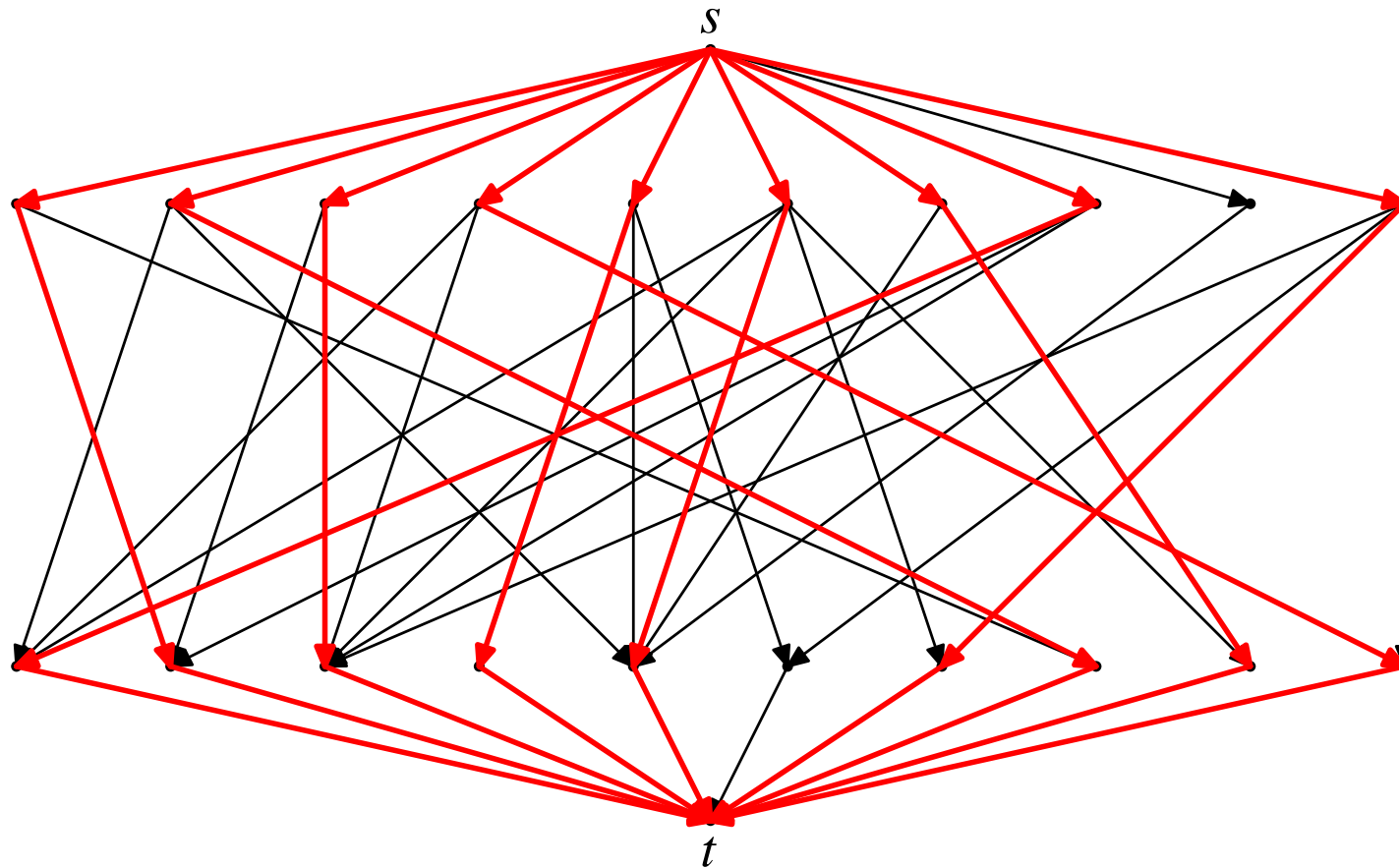
⇒ Neues Matching



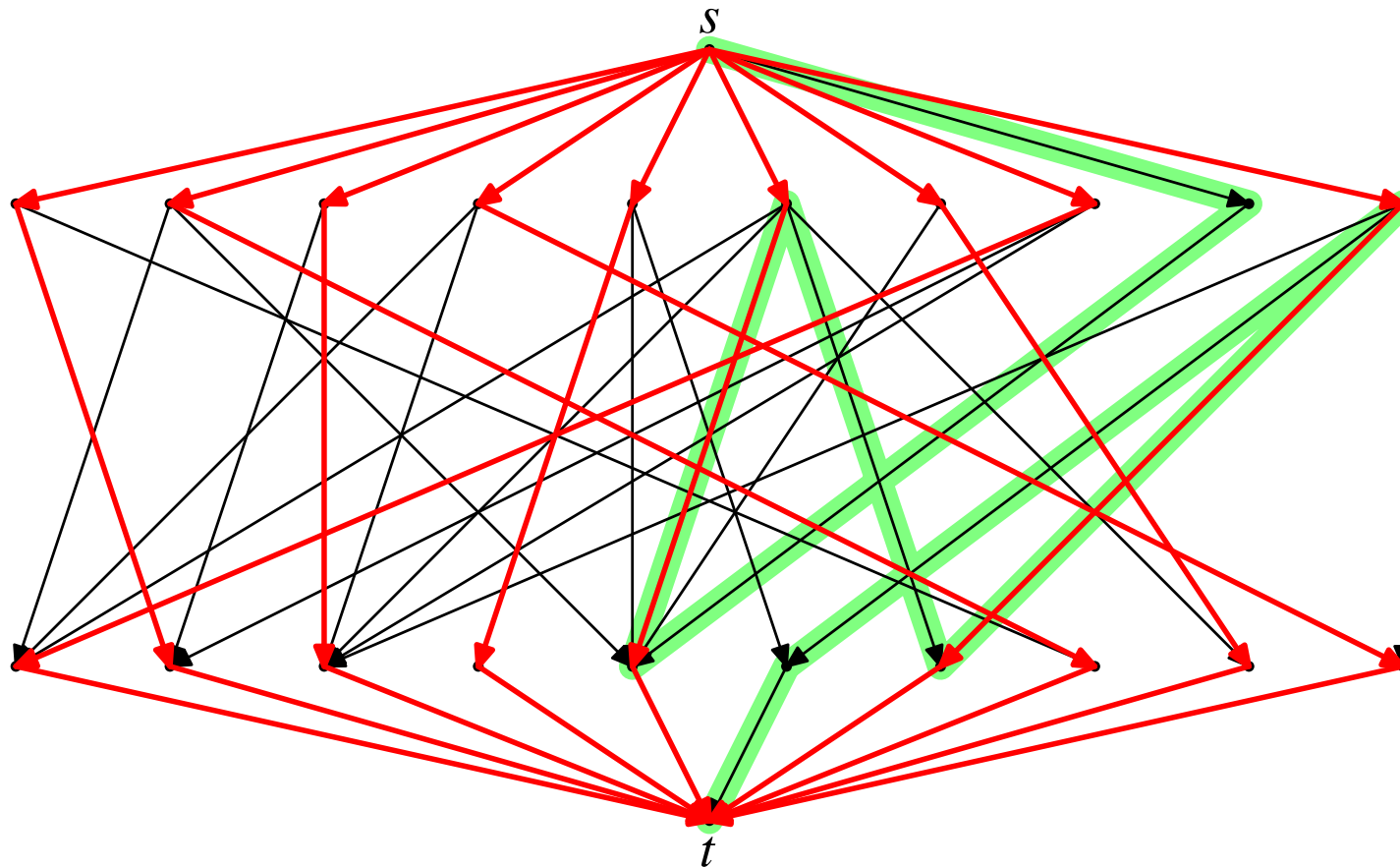
Es gibt wieder einen augmentierenden Pfad



⇒ Neues Matching



Es gibt wieder einen augmentierenden Pfad



Ergebnis: Perfektes Matching

