Problem:

$E(\max\{X, Y\}) \leq E(X) + E(Y)$ korrekt, aber zu ungenau.

$E(\max\{X, Y\}) \leq \max\{E(X), E(Y)\}$ genau genug, aber zu unkorrekt.

Führe neue Zufallsvariablen ein:

$$\hat{T}_n = 2^{T_n}, \quad \hat{T}'_n = 2^{T'_n}, \quad \hat{T}''_n = 2^{T''_n}$$

$$ET_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1\right)$$

$$E\hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\}+1}\right)$$

Die Kurven sind jetzt steiler!

Vereinfachen wir diese Rekursionsgleichung zunächst:

$$E\,\hat{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E\Big(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\}+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2E\big(\max\{2^{T'_k}, 2^{T''_{n-k-1}}\}\big) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E\big(\max\{\hat{T}'_k, \hat{T}''_{n-k-1}\}\big)$$

$$\leq \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E\big(\hat{T}'_k + \hat{T}''_{n-k-1}\}\big) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(E\,\hat{T}_k + E\,\hat{T}_k\}\big) = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E\,\hat{T}_k$$

Diese Rekursionsgleichung läßt sich mit Standardmethoden lösen.
→ Vorlesung Analyse von Algorithmen

Wir müssen sie aber gar nicht exakt lösen.
Ähnliche Situation bei der Analyse von Quicksort (später).

$$E\,\hat{T}_n = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E\,\hat{T}_k$$

Wir „lösen“ diese Gleichung nicht.

Wir zeigen nur, daß $E\,\hat{T}_n \leq (n+3)^{\underline{3}} = (n+3)(n+2)(n+1)$:

$n = 1$: $E\,\hat{T}_1 = 2 \leq (1+3)^{\underline{3}}$

$n > 1$:

$$E\,\hat{T}_n \leq \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E\,\hat{T}_k \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+3)^{\underline{3}} = \frac{4}{n}\frac{(n+3)^{\underline{4}}}{4} = (n+3)^{\underline{3}}.$$

Polynome verhalten sich gut beim Integrieren.

Lemma

$$\int_0^x t^k \, dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{k}} = \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

Fallende Potenzen verhalten sich gut beim Summieren.

Lemma

Es seien $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ *mit* $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Des weiteren seien $w_1, \ldots, w_n \geq 0$.

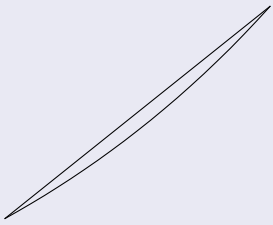
Dann gilt

$$2^{\sum_{k=1}^{n} w_k p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{w_k} p_k.$$

Beweis.

Wir betrachten $f(t) = 2^a t + 2^b(1-t)$ und $g(t) = 2^{at+b(1-t)}$ im Einheitsintervall.
Es sei $a \neq b$.

- f ist linear
- g ist überall links- oder rechtsgekrümmt:
  Denn $g''(t) = g(t)(\ln 2)^2(a-b)$.
- O.B.d.A. $a > b$, dann ist g rechtsgekrümmt.
- $f(0) = g(0) \leq f(1) = g(1) \Rightarrow f(t) \geq g(t)$



Daraus folgt

$$2^{\sum_{k=1}^{n} w_k p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{w_k} p_k$$

für $n = 2$. □

Beweis.

Für $n > 2$ gilt:

$$2^{\sum_{k=1}^{n} k p_k} = 2^{n p_n + \sum_{k=1}^{n-1} k p_k} = 2^{n p_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k p_k}{1-p_n}\right)(1-p_n)} \leq$$

$$\overset{\text{I.V.}}{\leq} 2^n p_n + 2^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k p_k}{1-p_n}} (1-p_n) \leq$$

$$\overset{\text{I.V.}}{\leq} 2^n p_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \frac{p_k}{1-p_n}\right)(1-p_n) = \sum_{k=1}^{n} 2^k p_k$$

□

Kommen wir zurück zu

$$E\hat{T}_n \leq (n+3)^{\underline{3}}.$$

Es gilt:

$$2^{ET_n} = 2^{\sum_{k=1}^{n} k \Pr[T_n=k]} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^k \Pr[T_n = k] = E(2^{T_n})$$

Und damit:

$$ET_n \leq \log(E\hat{T}_n) \leq \log((n+3)^{\underline{3}}) = \log(n^3(1+O(1/n)) = 3\log(n) + O(1/n)$$

Fertig!

Theorem (Mittlere Höhe eines Suchbaums)

Werden in einen leeren binären Suchbaum n verschiedene Schlüssel in zufälliger Reihenfolge eingefügt, dann ist die erwartete Höhe des entstehenden Suchbaums $O(\log n)$.

Wir verzichten auf eine Analyse für gemischtes Einfügen und Löschen.

Hier ist nicht so viel bekannt.

Experimente zeigen gutes Verhalten.

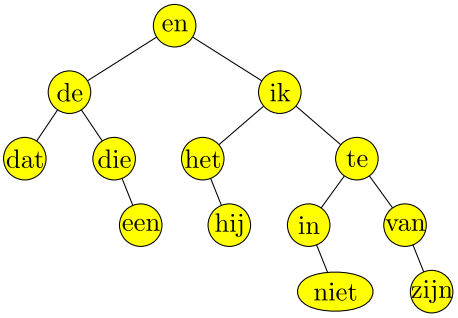
Die Höhe eines Suchbaums ist für seine Geschwindigkeit maßgebend.

Theorem

Die Operationen Einfügen, Löschen und Suchen benötigen $O(h)$ Zeit bei einem binären Suchbaum der Höhe h.

Optimale Suchbäume

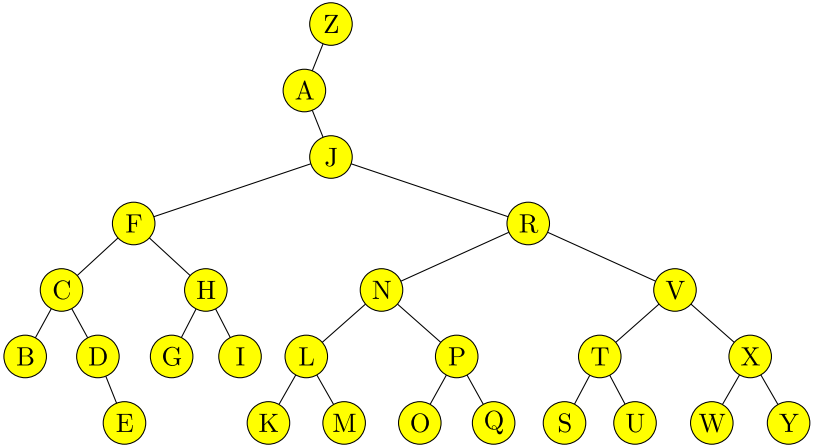
Ein optimaler Suchbaum für die 13 häufigsten Wörter des Buches Max Havelaar.



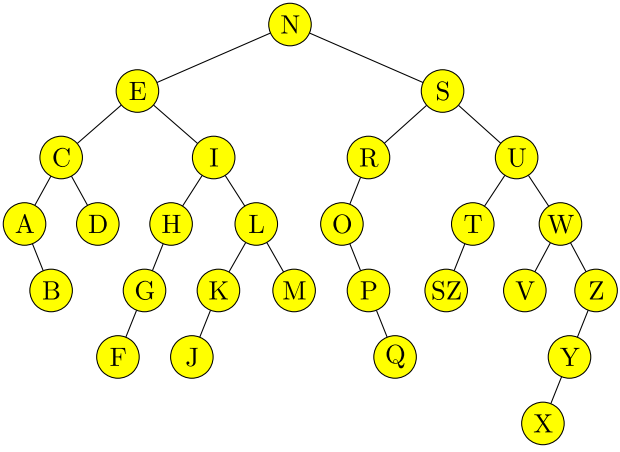
Wort	de	en	het	van	ik	te	dat	die
Anzahl	4770	2709	2469	2259	1999	1935	1875	1807

(Häufigkeitstabelle nach Wikipedia)

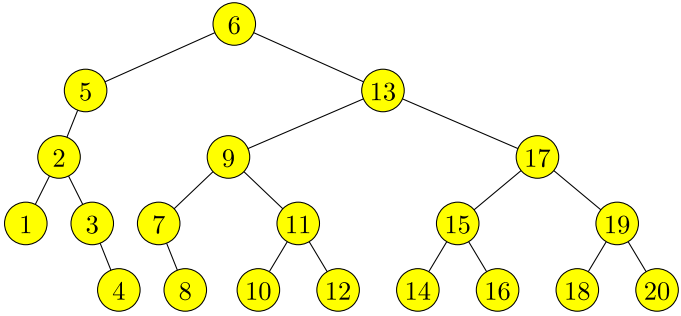
Ein optimaler Suchbaum enthält A bis Z. Die W'keit für A und Z sei 0.49, der Rest auf B–Y verteilt.
Wie sieht der Baum aus?



Optimale Suchbäume



Ein optimaler Suchbaum enthält die Zahlen 1–20. Auf jede wird mit W'keit 1/50 zugegriffen. Mit W'keit 3/5 wird 5.5 gesucht.
Wie sieht der Baum aus?



Optimale Suchbäume

- Es seien $k_1 < \cdots < k_n$ Schlüssel.
- Wir suchen k_i mit Wahrscheinlichkeit p_i.

Es gelte $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

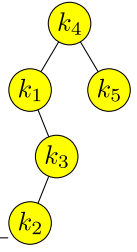
Definition

Ein optimaler Suchbaum für $k_1, \ldots, k_n$ gemäß den Zugriffswahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ ist

- ein Suchbaum für $k_1, \ldots, k_n$,
- und hat eine minimale Anzahl von Vergleichen im Erwartungswert, falls k_i mit Wahrscheinlichkeit p_i gesucht wird.

Es sei $w_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} p_k$.

Falls es in einem optimalen Suchbaum einen Unterbaum gibt, der die Schlüssel $k_i, \ldots, k_j$ enthält, dann sei $e_{i,j}$ der Erwartungswert der Anzahl der Vergleiche, die bei einer Suche in diesem Unterbaum durchgeführt werden.



i	1	2	3	4	5
p_i	1/4	1/8	1/6	1/4	5/24

$w_{1,5} = 1$, $w_{2,3} = 7/24$, $e_{2,2} = 1/8$, $e_{2,3} = 10/24$, $e_{1,3} = 23/24$

Wie können wir $w_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} p_k$ berechnen?

Algorithmus

```
for i = 1, ..., n do
  for j = 1, ..., n do
    w[i, j] := 0;
    for k = i, ..., j do
      w[i, j] := w[i, j] + p[k]
    od
  od
od
```

Wie schnell ist dieser Algorithmus?

Geht es schneller?

Wie können wir $w_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} p_k$ schneller berechnen?

Durch dynamisches Programmieren:

Java

```
for i = 1, ..., n do
  w[i, i] := p[i];
  for j = i + 1, ..., n do
    w[i, j] := w[i, j − 1] + p[j]
  od
od
```

Wie schnell ist dieser Algorithmus?

Warum ist er korrekt?

Wie berechnen wir $e_{i,j}$?

Lemma

- $e_{i,j} = 0$ *für* $i > j$
- $e_{i,j} = \min_{i \le r \le j} (e_{i,r-1} + e_{r+1,j}) + w_{i,j}$ *für* $i \le j$

Beweis.

Ein Baum mit den Knoten $k_i, \ldots, k_j$ hat eine Wurzel k_r.
Mit Wahrscheinlichkeit $w_{i,j}$ wird der gesuchte Schlüssel mit k_r verglichen.
Im Mittel werden $e_{i,r-1}$ Vergleiche im linken und $e_{r+1,j}$ im rechten Unterbaum durchgeführt. □

i	1	2	3	4	5
p_i	1/4	1/8	1/6	1/4	5/24

w	1	2	3	4	5
1	0.25	0.375	0.542	0.792	1.0
2	0.0	0.125	0.292	0.542	0.75
3	0.0	0.0	0.167	0.417	0.625
4	0.0	0.0	0.0	0.25	0.458
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.208

e	1	2	3	4	5
1	0.25	0.5	0.958	1.542	2.167
2	0.0	0.125	0.417	0.917	1.375
3	0.0	0.0	0.167	0.583	1.0
4	0.0	0.0	0.0	0.25	0.667
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.208

$$e_{i,j} = \min_{i \le r \le j} (e_{i,r-1} + e_{r+1,j}) + w_{i,j}$$

Resultierender Algorithmus:

Algorithmus

```
for i = 1, ..., n do e[i, i − 1] := 0 od;
for l = 0, ..., n do
  for i = 1, ..., n − l do
    j := i + l;
    e[i, j] := ∞;
    for r = i, ..., j do
      e[i, j] := min { e[i, j], e[i, r − 1] + e[r + 1, j] + w[i, j]}
    od
  od
od
```

Laufzeit: $O(n^3)$

Optimale Suchbäume – Allgemeiner Fall

- Es seien $k_1 < \cdots < k_n$ Schlüssel.
- Wir suchen k_i mit Wahrscheinlichkeit p_i.
- Wir suchen zwischen k_i und k_{i+1} mit Wahrscheinlichkeit q_i.
- (Mit W'keit q_0 wird links von k_1 gesucht.)
- (Mit W'keit q_n wird rechts von k_n gesucht.)

Natürlich gelte

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1.$$

Optimale Suchbäume – Allgemeiner Fall

Definition

Ein optimaler Suchbaum für $k_1, \ldots, k_n$ gemäß den Zugriffswahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ und $q_0, \ldots, q_n$ ist

- ein Suchbaum für $k_1, \ldots, k_n$,
- und hat eine minimale Anzahl von Vergleichen im Erwartungswert, falls k_i mit Wahrscheinlichkeit p_i und zwischen k_i und k_{i+1} mit Wahrscheinlichkeit q_i gesucht wird.

B Java

```
public void opt_searchtree(int n, List⟨K⟩ keys, List⟨Double⟩ p, List⟨Double⟩ q) {
  double[][] e = new double[n + 2][n + 1];
  double[][] w = new double[n + 2][n + 1];
  int[][] root = new int[n + 2][n + 1];
  for(int i = 1; i ≤ n + 1; i++) w[i][i − 1] = e[i][i − 1] = q.get(i − 1);
  for(int l = 0; l ≤ n; l++)
    for(int i = 1; i + l ≤ n; i++) {
      e[i][i + l] = Double.MAX_VALUE;
      w[i][i + l] = w[i][i + l − 1] + p.get(i + l) + q.get(i + l);
      for(int r = i; r ≤ i + l; r++) {
        Double t = e[i][r − 1] + e[r + 1][i + l] + w[i][i + l];
        if(t < e[i][i + l]) { e[i][i + l] = t; root[i][i + l] = r; }
      }
    }
  construct_opt_tree(1, n, keys, root);
}
```

Konstruktion optimaler Suchbäume

Java

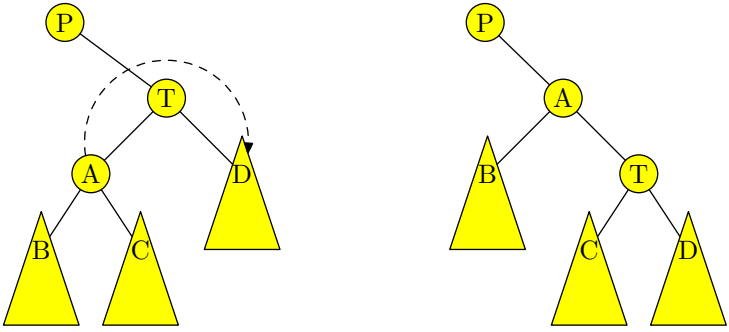
```
void construct_opt_tree(int i, int j, List<K> keys, int[][] root) {
  if(j < i) return;
  int r = root[i][j];
  insert(keys.get(r), null);
  construct_opt_tree(i, r − 1, keys, root);
  construct_opt_tree(r + 1, j, keys, root);
}
```

Konstruktion optimaler Suchbäume

Theorem

Wir können einen optimalen Suchbaum für n Schlüssel in $O(n^3)$ Schritten konstruieren.

Umstrukturierung durch Rotationen



Eine Rechtsrotation um T.

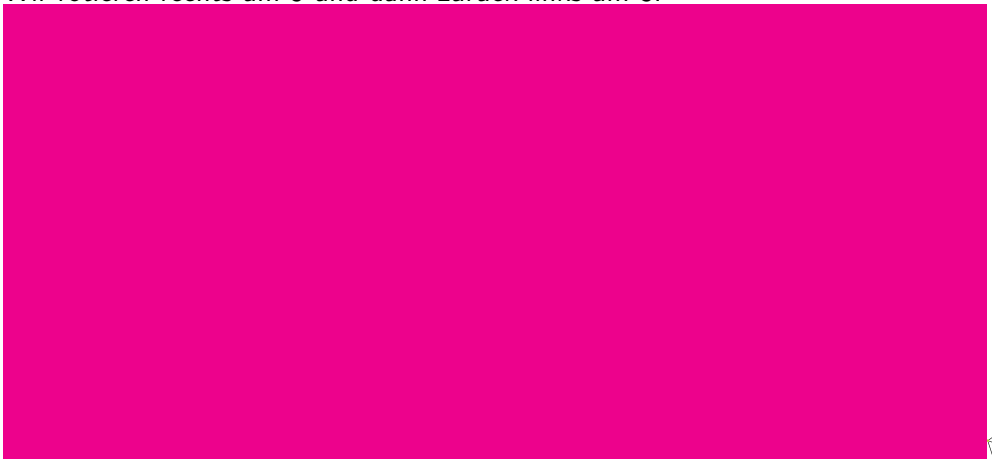
Die Suchbaumeigenschaft bleibt erhalten.

B, C, D können nur aus externen Knoten bestehen.

Laufzeit: Konstant!

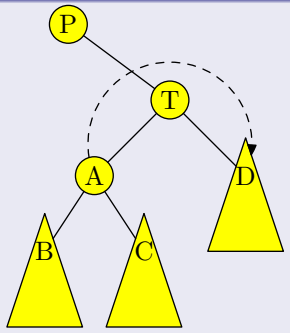
Rotationen

Wir rotieren rechts um 5 und dann zurück links um 3.

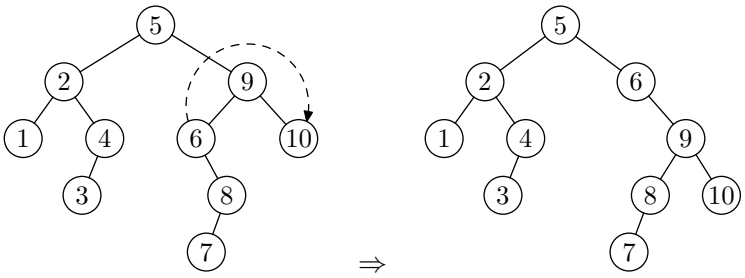


Java

```
void rotateright() {
  Searchtreenode⟨K, D⟩ p, a, b, c, d;
  p = this.parent;
  a = this.left;  d = this.right;
  b = a.left;  c = a.right;
  if(p ≠ null) {
    if(p.left == this) p.left = a;
    else p.right = a;
  }
  a.right = this;  a.parent = p;
  this.left = c;  this.parent = a;
  if(c ≠ null) c.parent = this;
}
```



Beispiel



Frage: Kann man einen Knoten durch Rotationen zu einem Blatt machen?