Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2019
Prof. Dr. P. Rossmanith
S. Dollase, J. Dreier, H. Lotze

Datum: 06.06.2019

Übungsblatt mit Lösungen 09

Aufgabe T31

Beweisen Sie den zweiten Punkt von Lemma A: $f(X,Y) = -f(Y,X)$ für $X, Y \subseteq V$, falls f ein Fluss für $G = (V,E)$ ist.

Lösungsvorschlag

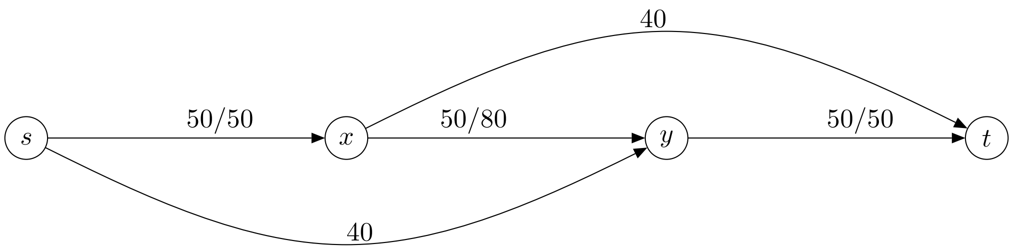
$$f(X,Y) \stackrel{Def.}{=} \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} f(x,y) \stackrel{Symm.}{=} \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} -f(y,x) =$$

$$\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} -f(y,x) = -\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} f(y,x) \stackrel{Def.}{=} -f(Y,X)$$

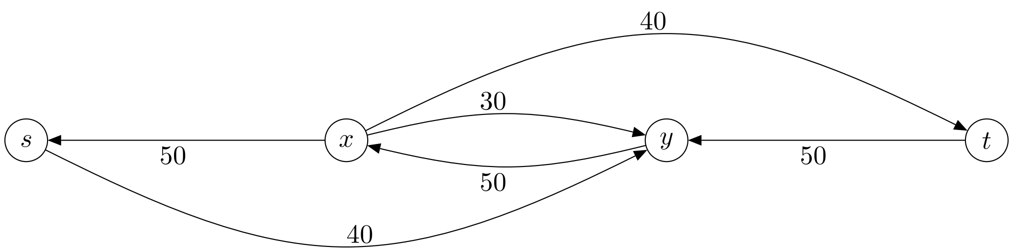
Aufgepasst: Welche Rolle spielen hier das Kommutativitäts-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz?

Aufgabe T32

Gegeben ist folgendes Flussnetzwerk G und ein zugehöriger Fluss f. Wie sieht das Residualnetzwerk G_f aus? Was ist der maximale Fluss?



Lösungsvorschlag



Der maximale Fluss beträgt 90.

Aufgabe T33

Wieder einmal wollen wir in einem gerichteten Graphen feststellen, ob es mindestens zwei kantendisjunkte Pfade von einem Knoten s zu einem Knoten t gibt.
Wie lässt sich dieses Problem als Flussproblem modellieren und lösen?
Wenden Sie Ihre Erkenntnisse auf das Gegenbeispiel an, welches Sie letzte Wochen zum naiven Vorgehen fanden.

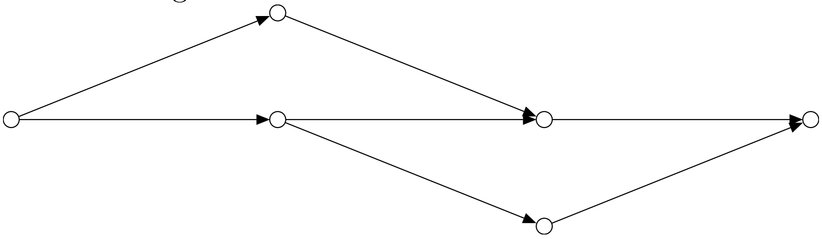
Lösungsvorschlag

Wir verwandeln zunächst den ungerichteten Graphen in einen Flussgraphen mit Quelle s und Senke t, indem wir jeder Kante eine Kapazität von 1 zuweisen.

Berechnen wir einen ganzzahligen Fluss mit der Ford–Fulkerson-Methode, der einen Wert von zwei hat, dann bilden alle Kanten über die ein Fluss fließt die zwei kantendisjunkten Wege.

Dies können wir bewerkstelligen, indem wir entweder die Ford–Fulkerson-Methode abbrechen, nachdem ein Fluss mit dem Wert zwei erreicht worden ist, oder indem wir einen maximalen ganzzahligen Fluss berechnen und das Netzwerk vorher so verändern, dass nur ein Fluss von zwei die Quelle verlassen kann.

Das Gegenbeispiel sah wie folgt aus:



Im Gegenbeispiel erhalten wir so natürlich einen Fluss mit Wert zwei und wir können die beiden kantendisjunkten Pfade wie erwartet ablesen.

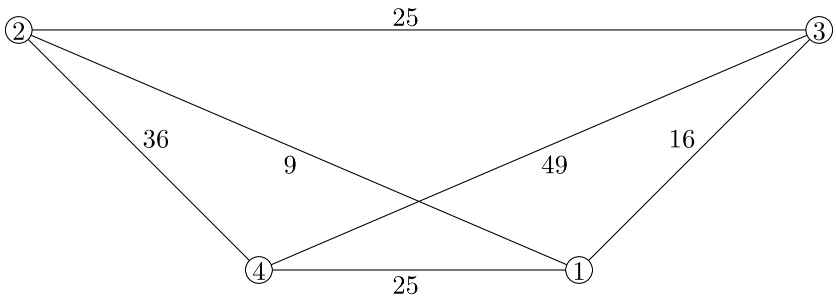
Aufgabe T34

Wir betrachten folgenden ungerichteten Graphen: Die Knoten sind die Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ und es gibt Kanten zwischen allen Knotenpaaren. Darüber hinaus hat eine Kante zwischen den Knoten i und j das Gewicht $(i + j)^2$.

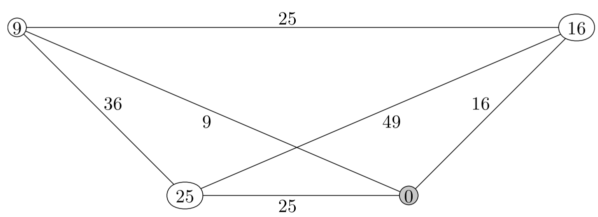
Führen Sie den Algorithmus von Dijkstra auf diesem gewichteten Graphen aus, wobei Sie 1 als Startknoten verwenden. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

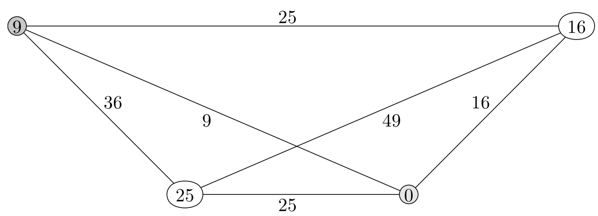
Lösungsvorschlag

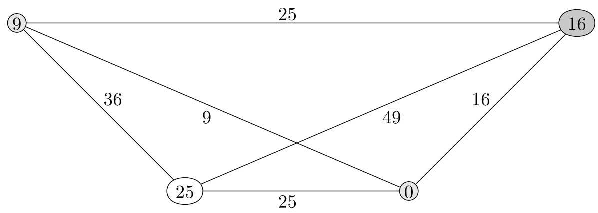
Der Graph sieht anfangs so aus:

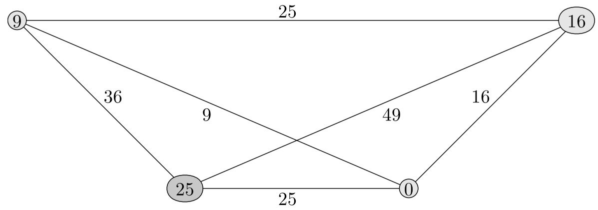


Die vier einzelnen Relaxationsschritte liefern folgende Zwischenergebnisse:









Zuletzt sind alle Entfernungen richtig. Ab der zweiten Iteration wurde nichts mehr verändert, also bestehen alle kürzesten Wege aus je nur einer Kante.

Aufgabe H25 (7+1+2 Punkte)

Das „Neunerschiebepuzzle“ besteht aus acht beweglichen Feldern in einer 3×3-Matrix. Jeweils eine der neun Positionen ist frei und ein an die freie Position angrenzendes Feld kann in diese hineingeschoben werden. Dies nennen wir einen „Zug“.

1	2	3
	4	5
7	8	6

1	2	3
4	5	6
7	8	

Ziel des Spiels ist es, die rechts gezeigte Position zu erreichen. Wir können uns nun einen ungerichteten Graphen vorstellen, dessen Knoten die Positionen dieses Spiels sind. Zwei Positionen sind durch eine Kante verbunden, wenn ein Zug sie ineinander überführt.

Wir können eine Breitensuche auf diesen Graphen beginnen, ohne ihn vorher komplett zu konstruieren. Führen Sie eine solche Breitensuche auf dem links gezeigten Startknoten aus und brechen Sie sie ab, sobald die Zielposition erscheint.

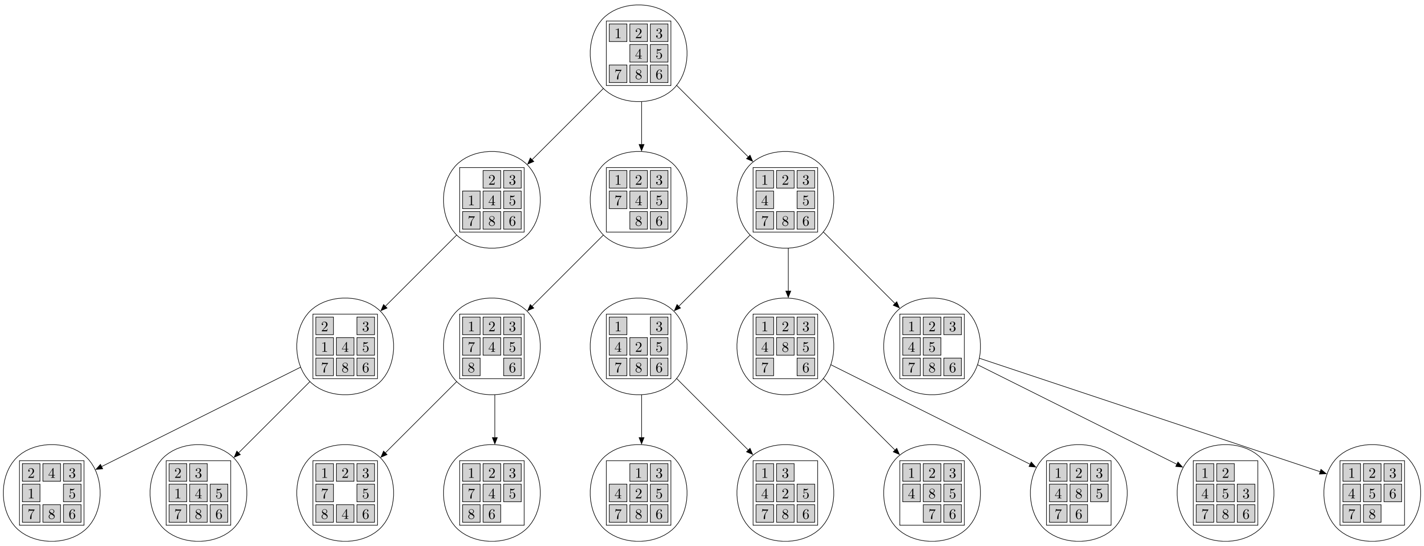
a) Zeichnen Sie den bis dahin entstandenen Breitensuchbaum auf.

b) Können Sie jetzt eine kürzestmögliche Lösung des Rätsels aus diesem Baum ablesen?

c) Ist es in dieser und ähnlichen Situationen Ihrer Meinung nach besser eine Tiefen- oder eine Breitensuche durchzuführen?

Lösungsvorschlag

Ein möglicher Baum sieht so aus.

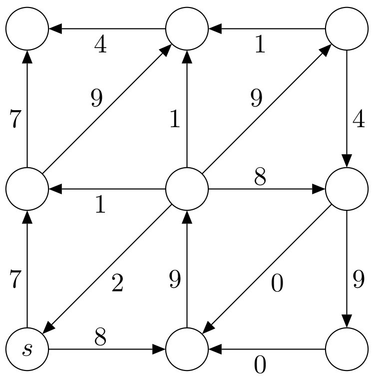


Eine Breitensuche scheint hier die bessere Wahl, da bei einer Tiefensuche sehr viele weit entfernte Konfiguration besucht werden könnten, bevor der relativ nahe Zielknoten gefunden wird.

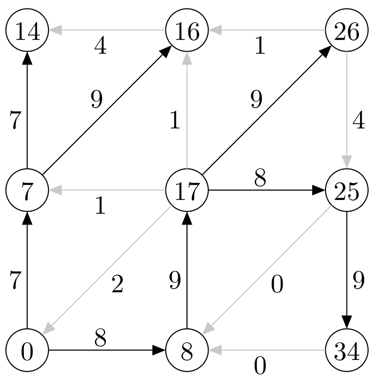
Aufgabe H26 (10 Punkte)

Finden Sie die kürzesten Wege zu allen Knoten vom Startknoten s, indem Sie den Algorithmus von Dijkstra verwenden.

Geben Sie dazu die resultierenden Distanzen von s zu allen Knoten an, indem Sie diese in die Knoten des Graphen eintragen. Markieren Sie außerdem jede Kante, die zu einem kürzesten Weg von s aus gehört.

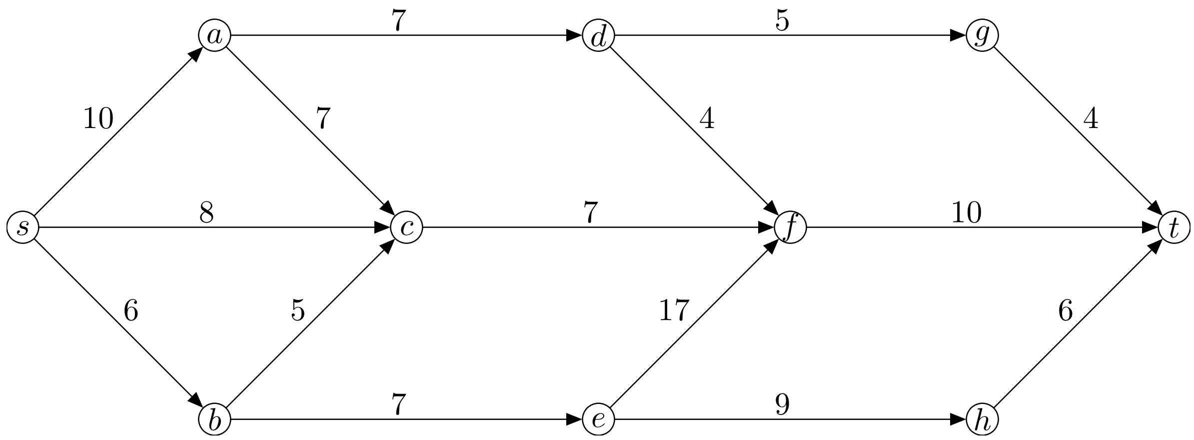


Lösungsvorschlag



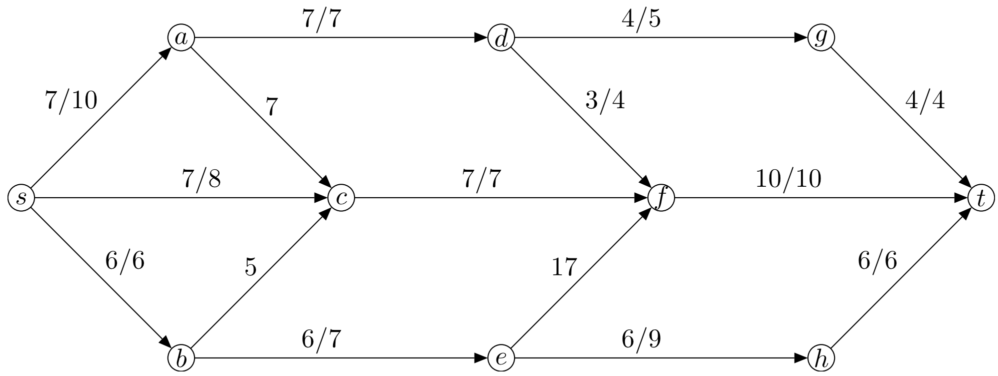
Aufgabe H27 (10 Punkte)

Wenden Sie die Ford–Fulkerson-Methode auf das folgende Flussnetzwerk an. Zeichnen Sie nach jeder Augmentierung das resultierende Residualnetzwerk.



Lösungsvorschlag

Ein möglicher maximaler Fluss ist:



Die zugehörigen Residualnetzwerke nach jeder Augmentierung sehen so aus.