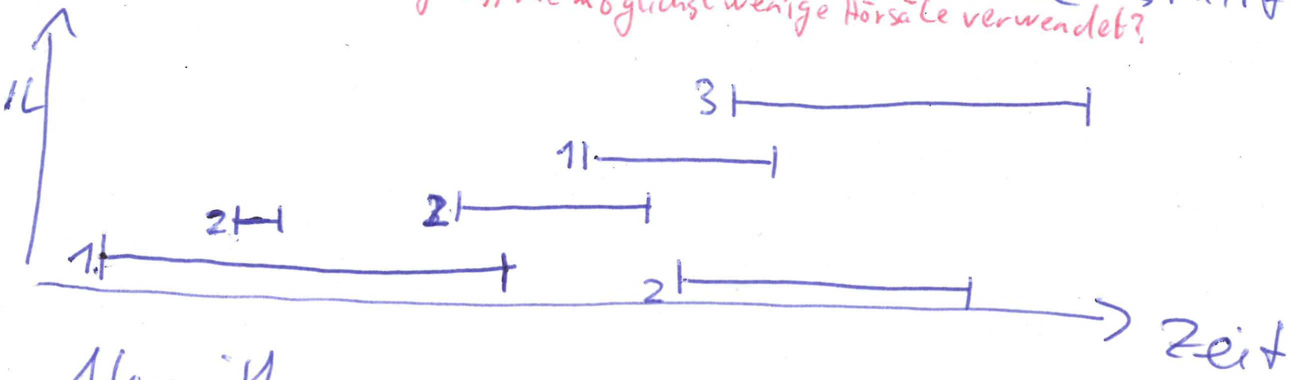
Gegeben: n Vorlesungen mit vorgegebenen Zeiträumen und k Hörsäle

Frage: Kann man alle Vorlesungen auf k Hörsääle aufteilen, sodass keine Vorlesungen gleichzeitig im gleichen Hörsaal stattfinden?
Wie sieht eine Verteilung aus, die möglichst wenige Hörsäle verwendet?



Algorithmus:

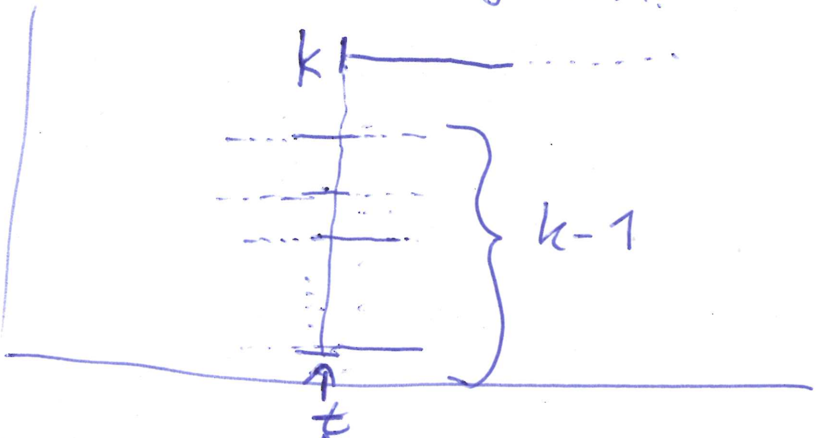
- Iteriere über alle VL in aufsteigender Reihenfolge nach Startzeit.

- weise der aktuellen VL die kleinste Zahl zu, die keiner VL zugewiesen wurde, die mit der aktuellen VL überlappt.

Korrektheit:

Zeige, der Algorithmus verwendet nur dann k Räume, wenn es nicht anders geht.

Angenommen Raum k wird ~~verwendet~~ zu Zeitpunkt t vergeben.



Laut Diagramm, finden zu dem Zeitpunkt t ~~an dem~~ bereits k-1 VL statt.

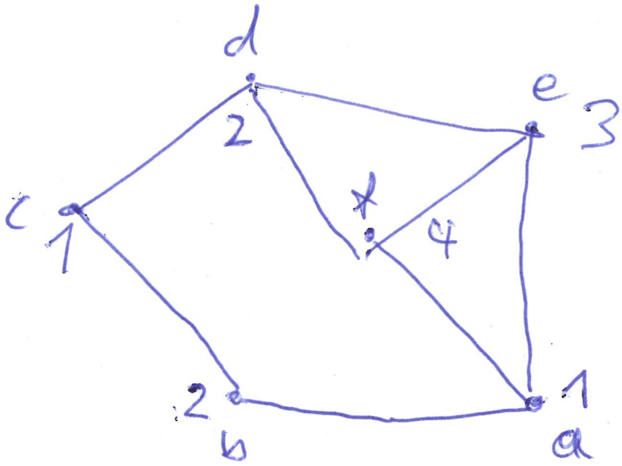
□

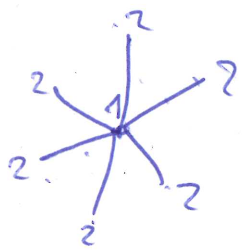
Graph G:

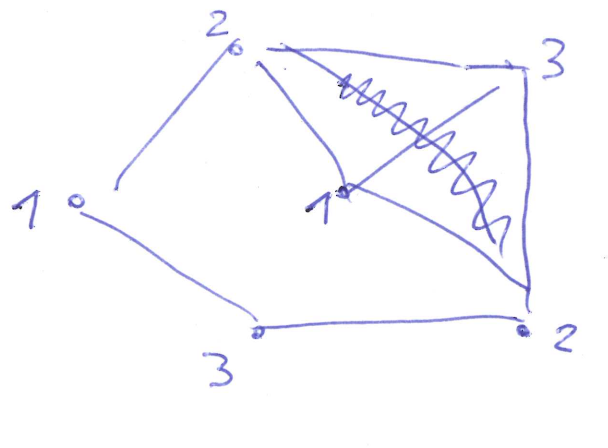
Knoten sind VL

Kante (u,v), wenn VL u und v im Konflikt stehen.

u, v können nicht im gleichen Raum stattfinden.



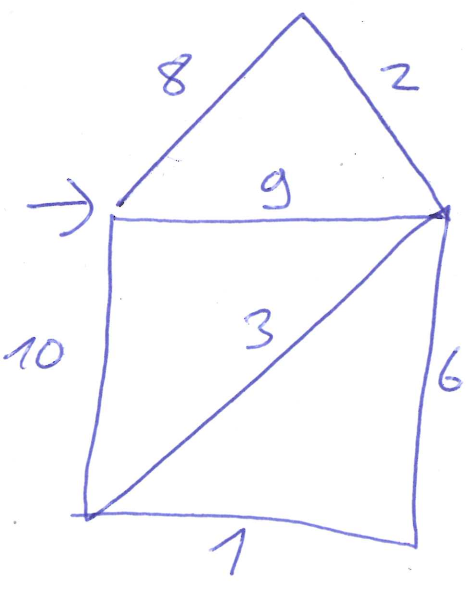




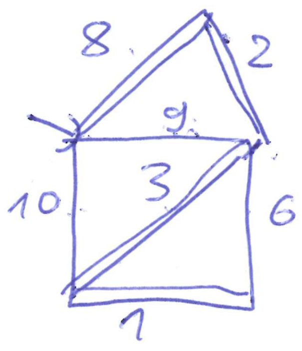
4

Prim: Baue Baum, indem schrittweise die günstigste Kante ~~[illegible]~~ eingefügt wird, die den Baum vergrößert.

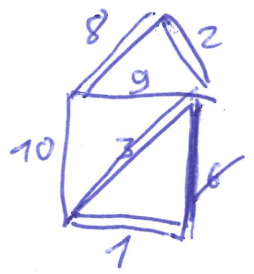
Kruskal: Füge schrittweise die günstigste Kante ein, die keinen Kreis erzeugt.



Prim: Baue Baum, indem wir schrittweise die günstigste Kante einfügen, die den Baum vergrößert



Kruskal: Nehme Kante mit kleinstem Gewicht, die keinen Kreis erzeugt.



Def. Matroide:

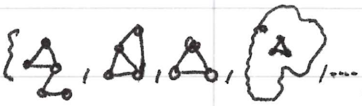
Ein Matroid $M = (S, I)$ besteht aus einer Basis S und einer Familie $I \subseteq 2^S$ von unabhängigen Mengen mit:

1.) Falls $A \subseteq B$ und $B \in I$, dann $A \in I$ (M ist hereditär)

2.) Falls $A, B \in I$ und $|A| < |B|$, dann gibt es ein $x \in B$ $(x \notin A)$, sodass $A \cup \{x\} \in I$ (M hat die Austauscheigenschaft)

Beispiele:

I) Sei $G = (V, E)$ ein ungewichteter Graph

Sei $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid (V, F)$ enthält einen Kreis der Länge $3\}$ $\mathcal{F} = \{$  $, \dots\}$

Ist $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid?

-> Nein! Hereditätseigenschaft gilt nicht!

Wenn wir z.B aus  $\in \mathcal{F}$ eine Kante entfernen, hat der resultierende Graph keinen Kreis der Länge 3 mehr! Eigenschaft 1) also verletzt!

IV) Sei $G = (V, E)$ ein ungewichteter Graph

Sei $\mathcal{F} = \{F \subseteq V \mid G[F]$ ist ein planarer Graph$\}$

[Informelle Definition Planarität: Lässt sich in der Ebene zeichnen, ohne dass sich Kanten schneiden. z.B. , aber nicht K_5: , aber K_4: ]

Ist $(V, \mathcal{F})$ ein Matroid?

-> Erste Eigenschaft ist erfüllt: Wenn wir Knoten aus einem bereits planaren Graphen entfernen, verringern wir höchstens Anzahl Kanten.

-> Zweite Eigenschaft? Nicht so einfach zu zeigen oder widerlegen.

~~Wir können ein Gegenbeispiel konstruieren: Sei G: Dann ist~~

~~$\mathcal{F} \supseteq \{\dots\}$, aber insbesondere~~

II) Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph.

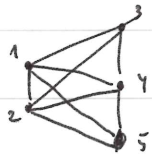
Sei $\mathcal{F} = \{F \subseteq V \mid G[F] \text{ enthält keinen } K_3 \text{ (Dreieck)}\}$ Ist $(V,\mathcal{F})$ ein Matroid?

Erste Eigenschaft: (Vererbungseigenschaft)

-> Trivialerweise erfüllt, entfernen von Knoten kann keine Kreise erzeugen.

Zweite Eigenschaft? (Austauscheigenschaft)

-> Wir können ein Gegenbeispiel konstruieren: Sei G:



Dann sind nach Definition $A :=$ 

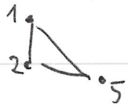
$\in \mathcal{F}$ und $B :=$ 

$\in \mathcal{F}$.

Dann müssten wir nach zweiter Eigenschaft einen Knoten von B zu A hinzufügen können, sodass A mit diesem zusätzlichen Knoten keinen C_3 enthält.

Das ist aber nicht möglich: 

, 

, 

$\notin \mathcal{F}$

Damit ist $(V,\mathcal{F})$ kein Matroid.

III) Sei E eine endliche Menge (z.B. endlich viele Zahlen), Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante.

Sei $\mathcal{T} = \{T \subseteq E \mid |T| \leq k\}$ z.B.: $\overset{k=2}{\mathcal{T}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$

Ist $(E,\mathcal{T})$ ein Matroid?

Erste Eigenschaft: (Vererbungseigenschaft)

Gilt offensichtlich: Elemente aus einer Menge entfernen macht diese nur kleiner. Wird anschließend immer noch kleiner oder gleich k Elemente haben.

Zweite Eigenschaft? (Austauscheigenschaft)

Leicht zu sehen: Wenn $|A| < |B|$ und im Extremfall $|B| = k$, ist $|A|+1 \leq k$.

Damit ist $(E,\mathcal{T})$ ein Matroid. Man nennt ihn auch den Einheitsmatroiden (Uniform Matroid)

Def.: Kontraktion von einem Matroiden

Sei $M=(S,I)$ ein Matroid und $x \in S$.

Dann ist $M'=(S',I')$ die Kontraktion von M um x, wobei

1) $S' = \{y \in S \mid \{x,y\} \in I, x \neq y\}$,

2) $I' = \{A \subseteq S-\{x\} \mid A \cup \{x\} \in I\}$

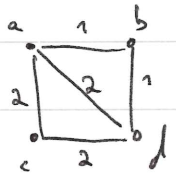
Erklärung: Wir „fixieren" x ~~fix~~, z.B. in einer Lösung.

1) entfernt alle Elemente aus S, welche alleine nicht mit x zusammen eine Lösung darstellen können (z.B. bei Kruskal Kanten, die einen Kreis schließen würden)

2) Entfernt alle Elemente aus I, die x nicht enthalten (z.B. bei Kruskal Spannbäume und deren Teilbäume, die x nicht enthalten)

$S = E$

Beispiel am Verlauf von Kruskal: $I = \{F \subseteq E \mid F \text{ enthält keinen Kreis}\}$



$S = \{(a,b),(b,d),(c,d),(a,c),(a,d)\}$

$I = \{\emptyset, \{(a,b)\}, \{(b,d)\}, \dots, \{(a,b),(b,d)\}, \{(a,b),(c,d)\}, \dots, \{(a,b),(b,d),(c,d)\}, \dots\}$

Aber z.B. ~~nicht~~: $\{(a,b),(b,d),(c,d),(a,c)\} \notin I$

Kontraktion um $x_1=(a,b)$:

$S'=S$

$I' = I \setminus \{\{(b,d)\}, \{(c,d)\}, \{(a,c)\}, \{(a,d)\}, \dots, \{(a,d),(b,d),(c,d)\}, \dots\}$

Kontraktion um $x_2=(b,d)$:

$S''=S' \setminus \{(a,d)\}$

$I''=I' \setminus \{\{(a,d),(a,b)\}, \dots\}$

Def. Matroide

Ein Matroid $M=(S,I)$ besteht aus einer Basis S und einer Familie $I \subseteq 2^S$ von unabhängigen Mengen mit:

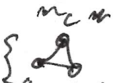
1) Falls $A \subseteq B$ und $B \in I$, dann $A \in I$ (M ist hereditär)
2) Falls $A, B \in I$ und $|A| < |B|$, dann gibt es ein $x \in B$ ($x \notin A$), sodass $A \cup \{x\} \in I$ (M hat die Austauscheigenschaft)

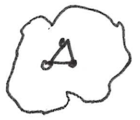
Beispiele:

I) Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph

$S := E$

$I = \{F \subseteq E \mid (V,F)$ enthält einen Kreis der Länge $3\}$

z.B. $I = \{$ 

,  ,  $\dots \}$

$\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$

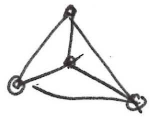
 $\notin I$

Ist (S,I) ein Matroid?

$\rightarrow$ Nein! Eigenschaft 1 ist verletzt (Vererbung)

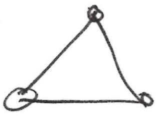
Wenn wir z.B. aus $\Delta \in I$ eine Kante entfernen, hat der resultierende Graph keinen Kreis der Länge 3.

II) Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph



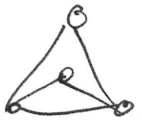
$S := V$

$I = \{F \subseteq V \mid G[F]$ enthält keinen Kreis der Länge 3$\}$



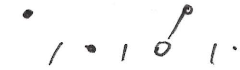
✓

[Induzierter Untergraph $G[F]$
$V(G[F]) := F$ ~~E(G)~~ $E(G[F]) := \{(x,y) \in E \mid x,y \in F\}$



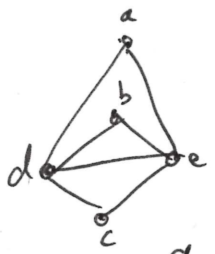
Ist (S, I) ein Matroid?

$G :=$ 

z.B. $I = \{$  $, \phi,$  $, \ldots\}$

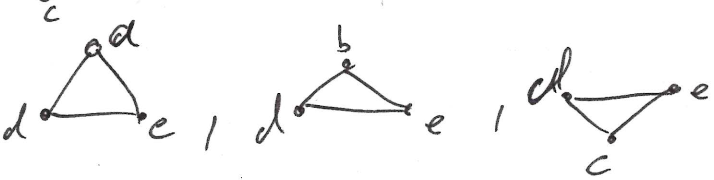
Erste Eigenschaft: (Vererbungseigenschaft)
→ Erfüllt! Das Entfernen von Knoten kann keinen Kreis erzeugen.

Zweite Eigenschaft: Ist verletzt!



B: 

A: d —— e $\in I$



$\notin I$

III) Sei E endliche Menge, z.B. endlich viele Zahlen. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante.

$S := E$
$I := \{T \subseteq E \mid \underline{|T| \leq k}\}$

z.B. $E = S = \{1,2,3\}$
z.B. $k = 2$

$I := \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$

Ist (S, I) ein Matroid?

Erste Eigenschaft?
Gilt offensichtlich: Elemente aus einer Menge entfernen macht sie nur kleiner

Zweite Eigenschaft?
Leicht zu sehen: Wenn $|A| < |B|$ und im Extremfall $|B| = k$, ist $|A| + 1 \leq k$

(S, I) ist ein Matroid. Einheitsmatroid (Uniform Matroid)