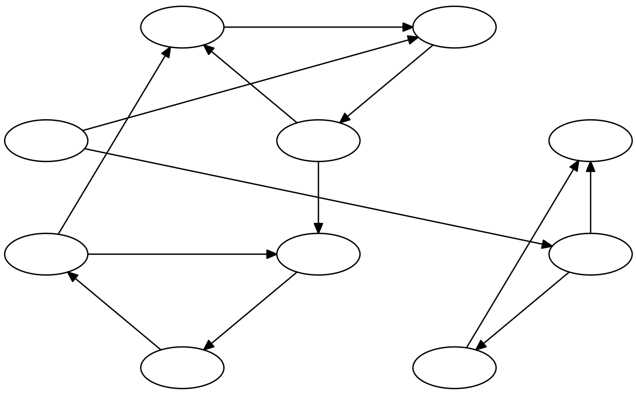
RWTH Aachen | **SS 2018**
Lehrgebiet Theoretische Informatik | Blatt 9
Rossmanith–Dreier–Kuinke | 25.6.2018

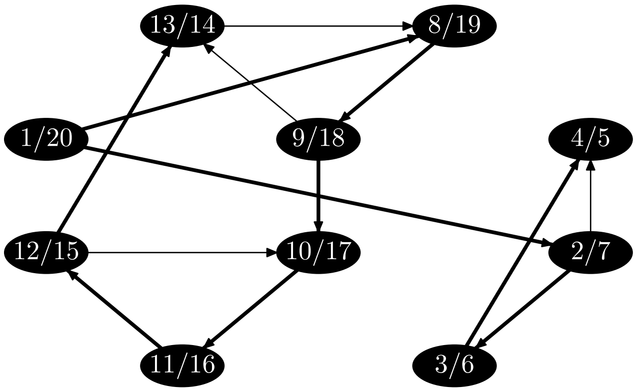
Übung zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe T18

Führen Sie auf folgenden Graphen eine Tiefensuche aus. Notieren Sie die *discovery*- und *finish*-Zeiten. Benennen Sie die Baum-, Quer-, Vorwärts- und Rückwärtskanten.



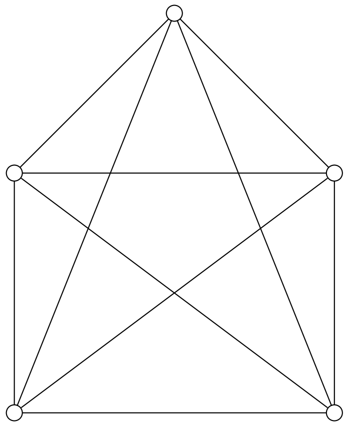
Lösungsvorschlag:



Die meisten Kanten sind Baumkanten. $2-4$ und $9-13$ sind Vorwärtskanten, $13-8$ und $12-10$ sind Rückwärtskanten. Es gibt keine Querkante.

Aufgabe T19

Ein *Dreieck* in einem Graphen ist ein Untergraph, der aus drei Knoten besteht, welche paarweise miteinander verbunden sind. Wieviele Dreiecke gibt es in folgenden Graphen?



Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für einen Graphen mit n Knoten in $O(n^3)$ Schritten herausfinden kann, ob er ein Dreieck enthält.

Wer das zu leicht findet, kann auch einen Algorithmus finden, der $O(n^2 + nm)$ Schritte braucht, wobei m die Anzahl der Kanten im Graph ist.

Lösungsvorschlag:

Der abgebildete Graph hat fünf Knoten. Er besitzt alle möglichen Kanten. Daher gibt es soviele Dreiecke, wie es Mengen von drei Knoten gibt, also $\binom{5}{3} = 10$.

Ein einfacher Algorithmus mit Laufzeit $O(n^3)$, der Dreiecke findet:

Betrachte alle Tripel $(u, v, w) \in V^3$ von Knoten und teste jeweils ob es alle drei möglichen Kanten zwischen ihnen gibt. Wenn wir eine Adjazenzmatrix haben (oder sie in quadratischer Zeit selbst aus einer Adjazenzliste berechnen), dann können wir diesen Test in konstanter Zeit durchführen, was zu insgesamt kubischer Laufzeit führt.

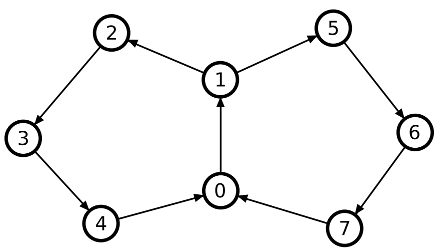
Ein Algorithmus mit $O(n^2 + nm)$ Schritten würde alle paare an Kanten (u, v) und Knoten w aufzählen und testen, ob w mit u und v verbunden ist.

Aufgabe H17 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Ergibt eine Tiefensuche in einem gerichteten Graphen genau eine Rückwärtskante, so liefert jede Tiefensuche in diesem Graphen genau eine Rückwärtskante.

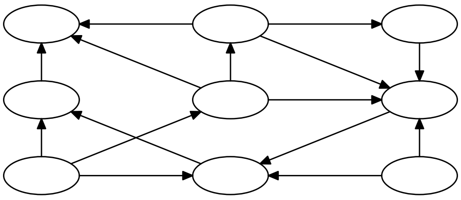
Lösungsvorschlag:

Die Aussage ist falsch, wie man sich an folgendem Gegenbeispiel überlegen kann.

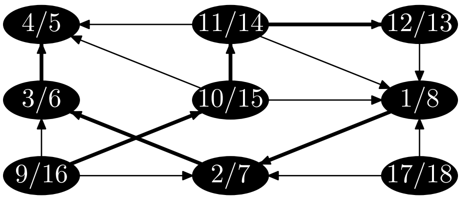


Beginnen wir die Tiefensuche am Knoten 1, so findet man genau eine Rückwärtskante, nämlich $(0, 1)$ (egal welchen Kreis man zuerst besucht). Eine Tiefensuche, die am Knoten 0 startet, wird jedoch die Rückwärtskanten $(4, 0)$ und $(7, 0)$ finden!

Aufgabe H18 (8 Punkte)
Behandeln Sie folgenden Graphen analog zu Aufgabe T18.



Lösungsvorschlag:



Die Baumkanten sind in der Zeichung fett gedruckt und alle anderen sind Querkanten.

Aufgabe H19 (5 Punkte)
Beweisen Sie per Induktion die fehlende Rechnung auf Folie 180 zur Laufzeitanalyse von Quicksort. In der Vorlesung war C_n die durchschnittliche Anzahl an Vergleichen von Quicksort bei einem zufälligen Input der Länge n.
Es gilt $C_1 = 0$ und es wurde bereits gezeigt, dass $C_n \leq n + 1 + 2/n \sum_{j=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} C_j$. Beweisen sie per Induktion über n, dass $C_n \leq 4n$.

Lösungsvorschlag:
Der Induktionsanfang ist durch $C_0 = 0$ gegeben. Wir beweisen, dass $C_n \leq 4n$ für alle n gilt. Im Beweis benutzen wir bei $(*)$ Gaußsche Summenformel.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gehen wir nun davon aus, daß $C_i \leq 4i$ für alle $i < n$ bereits erfüllt ist.

$$
\begin{aligned}
C_n &\leq n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} C_i \\
&\stackrel{\text{I.V.}}{\leq} n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} 4i \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} i \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} i \Big) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \Big) \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\frac{n}{2} - 1)\frac{n}{2}}{2} \Big) \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\frac{n^2 - n}{2} - \frac{n^2 - 2n}{8} \Big) \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\frac{4n^2 - 4n}{8} - \frac{n^2 - 2n}{8} \Big) \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\frac{4n^2 - 4n - n^2 + 2n}{8} \Big) \\
&\leq n + 1 + \frac{8}{n} \Big(\frac{3n^2 - 2n}{8} \Big) \\
&\leq n + 1 + 3n - 2 \\
&\leq 4n - 1 \\
&\leq 4n
\end{aligned}
$$