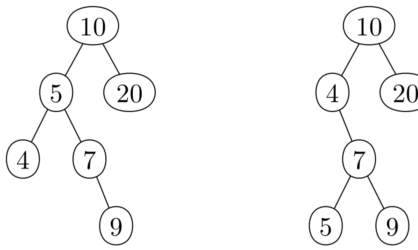
RWTH Aachen **SS 2018**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Blatt 2
Rossmanith–Dreier–Kuinke 30.4.2018

Übung zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe T4

Wie sieht ein anfangs leerer binärer Suchbaum aus, nachdem die Schlüssel 10, 5, 7, 20, 9 und 4 in dieser Reihenfolge eingefügt wurden? Wie sieht der Baum aus, wenn wir dann erst die 5 löschen und sie anschliessend wieder einfügen?

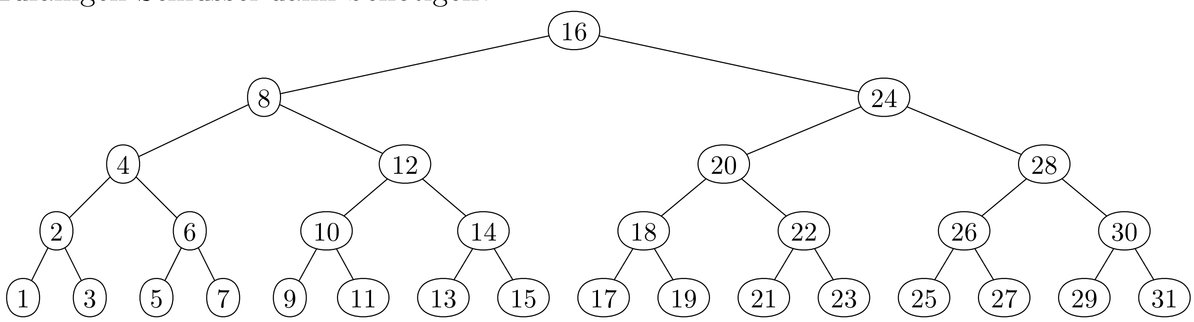
Lösungsvorschlag:



Aufgabe T5

In welcher Reihenfolge könnten die Schlüssel in folgenden binären Suchbaum eingefügt worden sein? Wieviele Vergleich müssen wir im Durchschnitt ausführen, wenn wir einen zufällig gewählten Schlüssel in diesem Baum suchen?

Welcher Suchbaum entstünde, fügten wir dieselben Schlüssel in aufsteigender Reihenfolge in einen anfangs leeren Suchbaum ein? Wieviele Vergleiche würde eine Suche nach einem zufälligen Schlüssel dann benötigen?



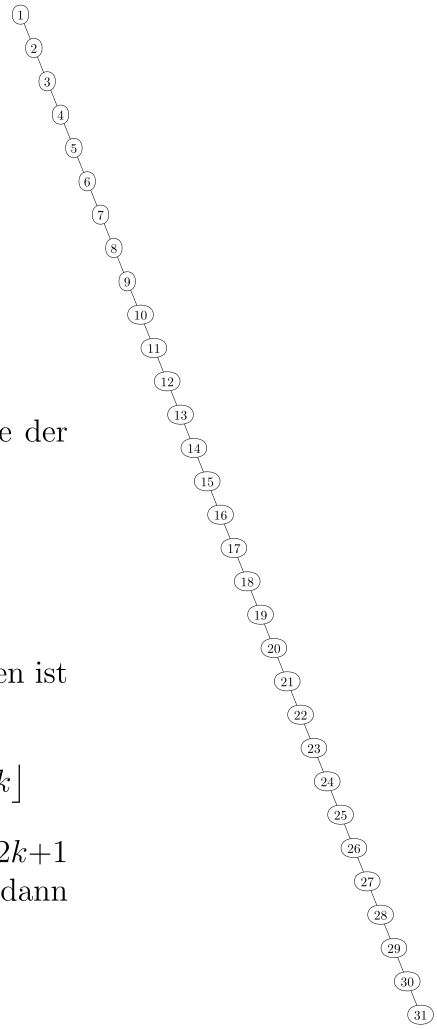
Lösungsvorschlag:

Eine mögliche Einfügungsreihenfolge wäre *schichtenweise:* 16, 8, 24, 4, 12, usw. Es gibt aber natürlich viele andere Möglichkeiten.

Um die Wurzel zu suchen, wird nur ein Vergleich benötigt. Für Schlüssel in der nächsten Schicht brauchen wir zwei Vergleiche usw. Die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen ist dann einfach

$$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 16 \cdot 5}{31} = \frac{129}{31} \approx 4.16129.$$

Würden wir die Schlüssel $1, \dots, 31$ in dieser Reihenfolge einfügen, entstünde der rechts gezeigte zur Liste entartete Baum.



Nach der gleichen Formel ist dort die Anzahl der Vergleiche im Durchschnitt

$$\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 31}{31} = \frac{496}{31} = 16,$$

was deutlich schlechter ist.

Aufgabe H2 (8 Punkte)

In der Vorlesung fehlte ein letztes Mosaiksteinchen in der Analyse der binären Suche. Beweisen Sie, daß für $n > 1$ folgendes gilt:

$$\lfloor \log n \rfloor = \lfloor \log \lceil (n-1)/2 \rceil \rfloor + 1$$

Lösungsvorschlag:

Sei $k \geq 0$, so daß entweder $n = 2k$ oder $n = 2k+1$. In beiden Fällen ist $\lceil (n-1)/2 \rceil = k$. Dann ist

$$\lfloor \log \lceil (n-1)/2 \rceil \rfloor + 1 = \lfloor \log k + \log 2 \rfloor = \lfloor \log 2k \rfloor$$

Für $n = 2k$ ist die Aussage damit bereits gezeigt. Für ungerade $n = 2k+1$ sei $q \geq 0$ maximal mit $2^q < n$, also $q = \lfloor \log n \rfloor$. Wegen $2^q \leq 2k$ gilt dann auch

$$q \leq \lfloor \log 2k \rfloor \leq \lfloor \log n \rfloor = q.$$

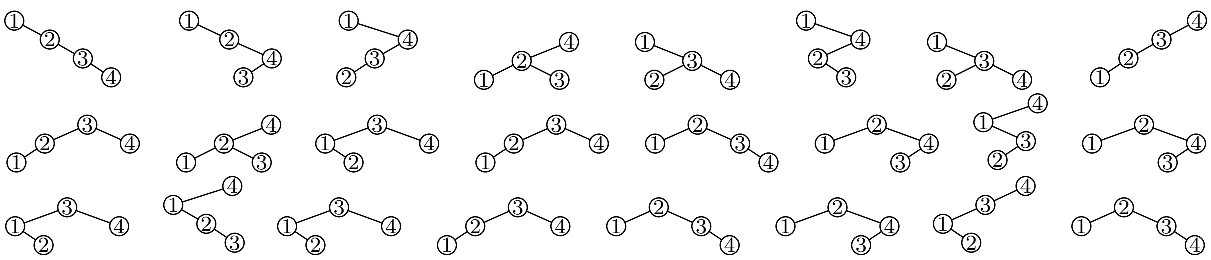
Aufgabe H3 (8 Punkte)

Es gibt $4! = 24$ Reihenfolgen, in welchen wir vier verschiedene Schlüssel in einen anfangs leeren binären Suchbaum einfügen können.

Wieviele verschiedene Suchbäume entstehen dabei und wie sehen sie aus?

Lösungsvorschlag:

Die 24 Reihenfolgen führen zu diesen 24 Suchbäumen:



Manche davon sind aber identisch, so dass es nur 14 verschiedene gibt.