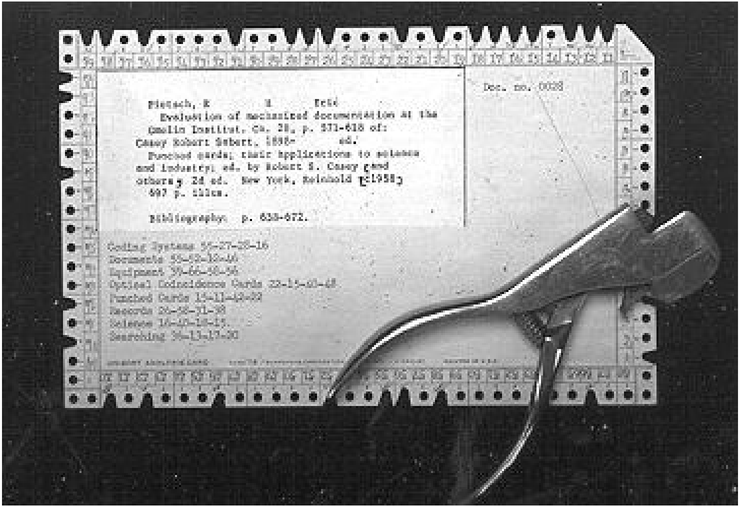
Radixsort


Evolution of mechanized documentation at the
Punched cards; their applications to science
Coding Systems
Documents
Equipment
Optical Coincidence Cards
Punched Cards
Records
Science
Searching

Gegeben seien Binärzahlen einer gewissen Länge:

11101010000010001000	01000000110011010001
10110001100111111001	00000000010000000011
01111100111110100100	01111100111110100100
00001011110100010001	00001011110100010001
01011011000110000000	01011011000110000000
11010111000100000110	01101011111000001001
00010111011101000011	00010111011101000011
01101011111000001001	11010111000100000110
10001101100000001100	10001101100000001100
11100000010000001010	11100000010000001010
10101010000011110000	10101010000011110000
10100100001011001010	10100100001011001010
00000000010000000011	10110001100111111001
01000000110011010001	11101010000010001000

Sortiere nach dem ersten Bit.

Bitstrings in Matrix $A[1 \dots n, 1 \dots w]$.
Vor dem Bitarray stehe $00 \dots 0$ und danach $11 \dots 1$.

Algorithmus

```
procedure radix_exchange_sort(i, a, b) :
  if i > w then return fi;
  s := a;  t := b;
  while s < t do
    while A[s, i] = 0 do s := s + 1;
    while A[t, i] = 1 do t := t − 1;
    vertausche A[s] und A[t]
  od;
  vertausche A[s] und A[t];
  radix_exchange_sort(i + 1, a, t);
  radix_exchange_sort(i + 1, s, b)
```

11101010000010001000	11101010000010001000
10110001100111111001	01111100111110100100
01111100111110100100	01011011000110000000
00001011110100010001	11010111000100000110
01011011000110000000	10001101100000001100
11010111000100000110	11100000010000001010
00010111011101000011	10101010000011110000
01101011111000001001	10100100001011001010
10001101100000001100	10110001100111111001
11100000010000001010	00001011110100010001
10101010000011110000	00010111011101000011
10100100001011001010	01101011111000001001
00000000010000000011	00000000010000000011
01000000110011010001	01000000110011010001

Sortiere nach dem letzten Bit.

Dann nach dem vorletzten usw. ($\rightarrow$ stabil!)

11101010000010001000	11101010000010001000
10110001100111111001	01111100111110100100
01111100111110100100	01011011000110000000
00001011110100010001	11010111000100000110
01011011000110000000	10001101100000001100
11010111000100000110	11100000010000001010
00010111011101000011	10101010000011110000
01101011111000001001	10100100001011001010
10001101100000001100	10110001100111111001
11100000010000001010	00001011110100010001
10101010000011110000	00010111011101000011
10100100001011001010	01101011111000001001
00000000010000000011	00000000010000000011
01000000110011010001	01000000110011010001

Sortiere nach dem letzten Bit.

Dann nach dem vorletzten usw. ($\rightarrow$ stabil!)

Straight-Radix-Sort

Algorithmus

procedure straight_radix_sort(i) :
  pos0 := 1; pos1 := n + 1;
  for k = 1, ..., n **do** pos1 := pos1 − A[k, i] **od**;
  for k = 1, ..., n **do**
    if A[k, i] = 0 **then** B[pos0] := A[k]; pos0 := pos0 + 1
                else B[pos1] := A[k]; pos1 := pos1 + 1 **fi**
  od

Sortiere stabil nach dem *i*-ten Bit.

Ergebnis ist in B .

Straight-Radix-Sort

Vollständiger Algorithmus:

Algorithmus

```
procedure straight_radix_sort :
  for i = w, ..., 1 do
    pos0 := 1;  pos1 := n + 1;
    for k = 1, ..., n do pos1 := pos1 − A[k, i] od;
    for k = 1, ..., n do
      if A[k, i] = 0 then B[pos0] := A[k];  pos0 := pos0 + 1
                  else B[pos1] := A[k];  pos1 := pos1 + 1 fi
    od;
    A := B;
  od;
```

Übersicht

2. Suchen und Sortieren
   - Einfache Suche
   - Binäre Suchbäume
   - Hashing
   - Skip-Lists
   - Mengen
   - Sortieren
   - Order-Statistics

Order-Statistics

Eingabe:

Eine Menge von n Schlüsseln aus einer geordneten Menge
Eine Zahl k, $1 \leq k \leq n$

Ausgabe:

Der k-te Schlüssel (nach Größe)

Spezialfall:

Median, der Schlüssel in der Mitte.

Einfachste Lösung:

1. Sortieren
2. Den Schlüssel an Position k zurückgeben

Order-Statistics

Eingabe:

Eine Menge von n Schlüsseln aus einer geordneten Menge
Eine Zahl k, $1 \leq k \leq n$

Ausgabe:

Der k-te Schlüssel (nach Größe)

Spezialfall:

Median, der Schlüssel in der Mitte.

Einfachste Lösung:

1. Sortieren
2. Den Schlüssel an Position k zurückgeben

Quickselect

Wie Quicksort, aber nur die richtige Seite rekursiv behandeln:

Algorithmus

```
procedure quickselect(k, L, R) :
  if R ≤ L then return a[k] fi;
  p := a[L]; l := L; r := R + 1;
  do
    do l := l + 1 while a[l] < p;
    do r := r − 1 while p < a[r];
    vertausche a[l] und a[r]
  while l < r;
  temp := a[r]; a[L] := a[l]; a[l] := temp; a[r] := p;
  if k = r then return p
  else if k < r then return quickselect(k, L, r)
  else return quickselect(k, r, R) fi
```

Quickselect – Analyse

Bei Quicksort hatten wir diese Rekursionsgleichung für die Anzahl der Vergleiche:

$$C_n = n + 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (C_{i-1} + C_{n-i}).$$

Für Quickselect gilt:

- Mit W'keit $1/n$ ist das Pivotelement der gesuchte Schlüssel
- Mit W'keit $(k-1)/n$ ist der gesuchte Schlüssel links
- Mit W'keit $(n-k)/n$ ist der gesuchte Schlüssel rechts

Quickselect – Analyse

Bei Quicksort hatten wir diese Rekursionsgleichung für die Anzahl der Vergleiche:

$$C_n = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_{i-1} + C_{n-i}).$$

Für Quickselect gilt:

- Mit W'keit $1/n$ ist das Pivotelement der gesuchte Schlüssel
- Mit W'keit $(k-1)/n$ ist der gesuchte Schlüssel links
- Mit W'keit $(n-k)/n$ ist der gesuchte Schlüssel rechts

Quickselect – Analyse

Für $n > 1$ haben wir:

$$\begin{aligned} C_n &= n + 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k-1} C_{n-i} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} C_{i-1} \\ &\leq n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} C_i \end{aligned}$$

Außerdem ist $C_0 = C_1 = 0$.

Zeige mit Induktion:

$$C_n \leq 4n$$

(Einfach $\rightarrow$ Übungsaufgabe)

Quickselect

Theorem

Quickselect findet den Schlüssel mit Rang k in einer n-elementigen Menge in $O(n)$ Schritten – im Erwartungswert.

Ein deterministischer Algorithmus

1. Falls $n < 30$: Sortiere und finde so das Ergebnis.
2. Bilde $m = \lfloor n/5 \rfloor$ Gruppen mit je fünf Schlüsseln. Bis zu vier Schlüssel bleiben übrig.
3. Berechne den Median jeder Gruppe.
4. Berechne rekursiv den Median p dieser $\lfloor n/5 \rfloor$ Mediane.
5. Verwende p als Pivotelement und führe damit Quickselect aus.

Welchen Rang r hat p?

p ist der Median von $m = \lfloor n/5 \rfloor$ vielen kleinen Medianen
$\rightarrow$ mindestens $m/2 - 1$ kleine Mediane sind kleiner als p
Jeder kleine Median hat zwei Schlüssel die kleiner sind
$\rightarrow$ mindestens $3m/2 - 1$ kleinere Schlüssel als p

Ebenso: Mindestens $3m/2 - 1$ größere Schlüssel als p
Das sind jeweils $3\lfloor n/5 \rfloor/2 - 1 \geq 3n/10 - 3/2 \geq n/4$.

Ein deterministischer Algorithmus

1. Falls $n < 30$: Sortiere und finde so das Ergebnis.
2. Bilde $m = \lfloor n/5 \rfloor$ Gruppen mit je fünf Schlüsseln. Bis zu vier Schlüssel bleiben übrig.
3. Berechne den Median jeder Gruppe.
4. Berechne rekursiv den Median p dieser $\lfloor n/5 \rfloor$ Mediane.
5. Verwende p als Pivotelement und führe damit Quickselect aus.

Welchen Rang r hat p?

p ist der Median von $m = \lfloor n/5 \rfloor$ vielen kleinen Medianen
$\rightarrow$ mindestens $m/2 - 1$ kleine Mediane sind kleiner als p
Jeder kleine Median hat zwei Schlüssel die kleiner sind
$\rightarrow$ mindestens $3m/2 - 1$ kleinere Schlüssel als p

Ebenso: Mindestens $3m/2 - 1$ größere Schlüssel als p
Das sind jeweils $3\lfloor n/5 \rfloor/2 - 1 \geq 3n/10 - 3/2 \geq n/4$.

Ein deterministischer Algorithmus

1. Falls $n < 30$: Sortiere und finde so das Ergebnis.
2. Bilde $m = \lfloor n/5 \rfloor$ Gruppen mit je fünf Schlüsseln. Bis zu vier Schlüssel bleiben übrig.
3. Berechne den Median jeder Gruppe.
4. Berechne rekursiv den Median p dieser $\lfloor n/5 \rfloor$ Mediane.
5. Verwende p als Pivotelement und führe damit Quickselect aus.

Welchen Rang r hat p?

p ist der Median von $m = \lfloor n/5 \rfloor$ vielen kleinen Medianen
$\rightarrow$ mindestens $m/2 - 1$ kleine Mediane sind kleiner als p
Jeder kleine Median hat zwei Schlüssel die kleiner sind
$\rightarrow$ mindestens $3m/2 - 1$ kleinere Schlüssel als p

Ebenso: Mindestens $3m/2 - 1$ größere Schlüssel als p
Das sind jeweils $3\lfloor n/5 \rfloor/2 - 1 \geq 3n/10 - 3/2 \geq n/4$.

Ein deterministischer Algorithmus

1. Falls $n < 30$: Sortiere und finde so das Ergebnis.
2. Bilde $m = \lfloor n/5 \rfloor$ Gruppen mit je fünf Schlüsseln. Bis zu vier Schlüssel bleiben übrig.
3. Berechne den Median jeder Gruppe.
4. Berechne rekursiv den Median p dieser $\lfloor n/5 \rfloor$ Mediane.
5. Verwende p als Pivotelement und führe damit Quickselect aus.

Welchen Rang r hat p?

p ist der Median von $m = \lfloor n/5 \rfloor$ vielen kleinen Medianen
$\rightarrow$ mindestens $m/2 - 1$ kleine Mediane sind kleiner als p
Jeder kleine Median hat zwei Schlüssel die kleiner sind
$\rightarrow$ mindestens $3m/2 - 1$ kleinere Schlüssel als p

Ebenso: Mindestens $3m/2 - 1$ größere Schlüssel als p
Das sind jeweils $3\lfloor n/5 \rfloor/2 - 1 \geq 3n/10 - 3/2 \geq n/4$.

Ein deterministischer Algorithmus

1. Falls $n < 30$: Sortiere und finde so das Ergebnis.
2. Bilde $m = \lfloor n/5 \rfloor$ Gruppen mit je fünf Schlüsseln. Bis zu vier Schlüssel bleiben übrig.
3. Berechne den Median jeder Gruppe.
4. Berechne rekursiv den Median p dieser $\lfloor n/5 \rfloor$ Mediane.
5. Verwende p als Pivotelement und führe damit Quickselect aus.

Welchen Rang r hat p?

p ist der Median von $m = \lfloor n/5 \rfloor$ vielen kleinen Medianen
$\rightarrow$ mindestens $m/2 - 1$ kleine Mediane sind kleiner als p
Jeder kleine Median hat zwei Schlüssel die kleiner sind
$\rightarrow$ mindestens $3m/2 - 1$ kleinere Schlüssel als p

Ebenso: Mindestens $3m/2 - 1$ größere Schlüssel als p

Das sind jeweils $3\lfloor n/5 \rfloor/2 - 1 \geq 3n/10 - 3/2 \geq n/4$.

Ein deterministischer Algorithmus

1. Falls $n < 30$: Sortiere und finde so das Ergebnis.
2. Bilde $m = \lfloor n/5 \rfloor$ Gruppen mit je fünf Schlüsseln. Bis zu vier Schlüssel bleiben übrig.
3. Berechne den Median jeder Gruppe.
4. Berechne rekursiv den Median p dieser $\lfloor n/5 \rfloor$ Mediane.
5. Verwende p als Pivotelement und führe damit Quickselect aus.

Welchen Rang r hat p?

p ist der Median von $m = \lfloor n/5 \rfloor$ vielen kleinen Medianen
$\rightarrow$ mindestens $m/2 - 1$ kleine Mediane sind kleiner als p
Jeder kleine Median hat zwei Schlüssel die kleiner sind
$\rightarrow$ mindestens $3m/2 - 1$ kleinere Schlüssel als p

Ebenso: Mindestens $3m/2 - 1$ größere Schlüssel als p
Das sind jeweils $3\lfloor n/5 \rfloor/2 - 1 \geq 3n/10 - 3/2 \geq n/4$

Deterministisches Selektieren – Analyse

Die Anzahl der Vergleiche ist jetzt

$$C_n \leq n + 1 + C_{\lfloor n/5 \rfloor} + C_{\lfloor 3n/4 \rfloor}$$

falls $n > 30$ und $O(1)$ falls $n \leq 30$:

- $C_{\lfloor n/5 \rfloor}$ für das rekursive Finden der Mediane
- $C_{\lfloor 3n/4 \rfloor}$ für die nächste Suche

Es folgt $C_n = O(n)$, da $1/5 + 3/4 < 1$.

Wir können also den Schlüssel mit Rang k in linearer Zeit finden.

Deterministisches Selektieren – Analyse

Die Anzahl der Vergleiche ist jetzt

$$C_n \leq n + 1 + C_{\lfloor n/5 \rfloor} + C_{\lfloor 3n/4 \rfloor}$$

falls $n > 30$ und $O(1)$ falls $n \leq 30$:

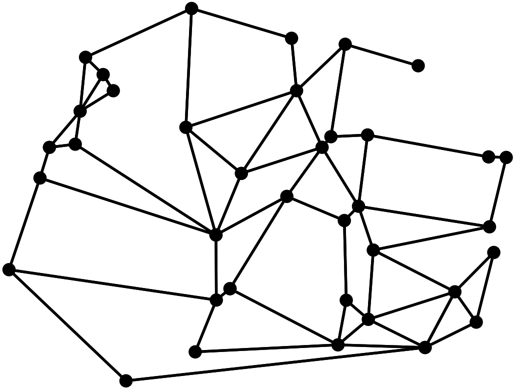
- $C_{\lfloor n/5 \rfloor}$ für das rekursive Finden der Mediane
- $C_{\lfloor 3n/4 \rfloor}$ für die nächste Suche

Es folgt $C_n = O(n)$, da $1/5 + 3/4 < 1$.

Wir können also den Schlüssel mit Rang k in linearer Zeit finden.

Übersicht

Graphen



Graphen

Definition

Ein ungerichteter Graph ist ein Paar (V, E), wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq \binom{V}{2}$ die Menge der Kanten ist.

Definition

Ein gerichteter Graph ist ein Paar (V, E), wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq V \times V$ die Menge der Kanten ist.

Oft betrachten wir Graphen mit Knoten- oder Kantengewichten.

Dann gibt es zusätzlich Funktionen $V \to \mathbf{R}$ oder $E \to \mathbf{R}$.

Graphen

Definition

Ein ungerichteter Graph ist ein Paar (V, E), wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq \binom{V}{2}$ die Menge der Kanten ist.

Definition

Ein gerichteter Graph ist ein Paar (V, E), wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq V \times V$ die Menge der Kanten ist.

Oft betrachten wir Graphen mit Knoten- oder Kantengewichten.

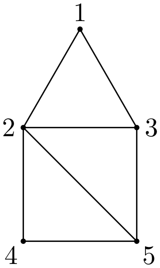
Dann gibt es zusätzlich Funktionen $V \to \mathbf{R}$ oder $E \to \mathbf{R}$.

Übersicht

3 Graphalgorithmen
- Darstellung von Graphen
- Tiefensuche
- Starke Komponenten
- Topologisches Sortieren
- Kürzeste Pfade
- Netzwerkalgorithmen
- Minimale Spannbäume

Darstellung von Graphen

Adjazenzmatrix



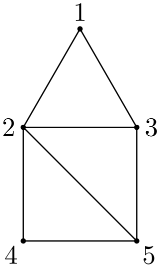
$$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Speicherbedarf: $\Theta(|V|^2)$

Für gerichtete Graphen wird die ganze Matrix verwendet.

Darstellung von Graphen

Adjazenzliste



1	2, 3
2	1, 3, 4, 5
3	1, 2, 5
4	2, 5
5	2, 3, 4

Speicherbedarf: $\Theta(|V| + |E|)$.

In $O(n^2)$ Schritten kann zwischen beiden Darstellungen konvertiert werden.

Darstellung von Graphen

Java

```java
public class Graph<V> {

    protected Set<V> nodes;
    protected Map<V, List<V>> edges;
    protected boolean directed = false;

    public Graph() {
      nodes = new HashSet<V>();
      edges = new HashMap<V, List<V>>();
    }
```

Wir wählen die Darstellung durch eine Adjazenzliste.

Java

```
public class Edge⟨V⟩ {
  public V s, t;

  public Edge(V s, V t) {
    this.s = s;
    this.t = t;
  }

}
```