Range-Search

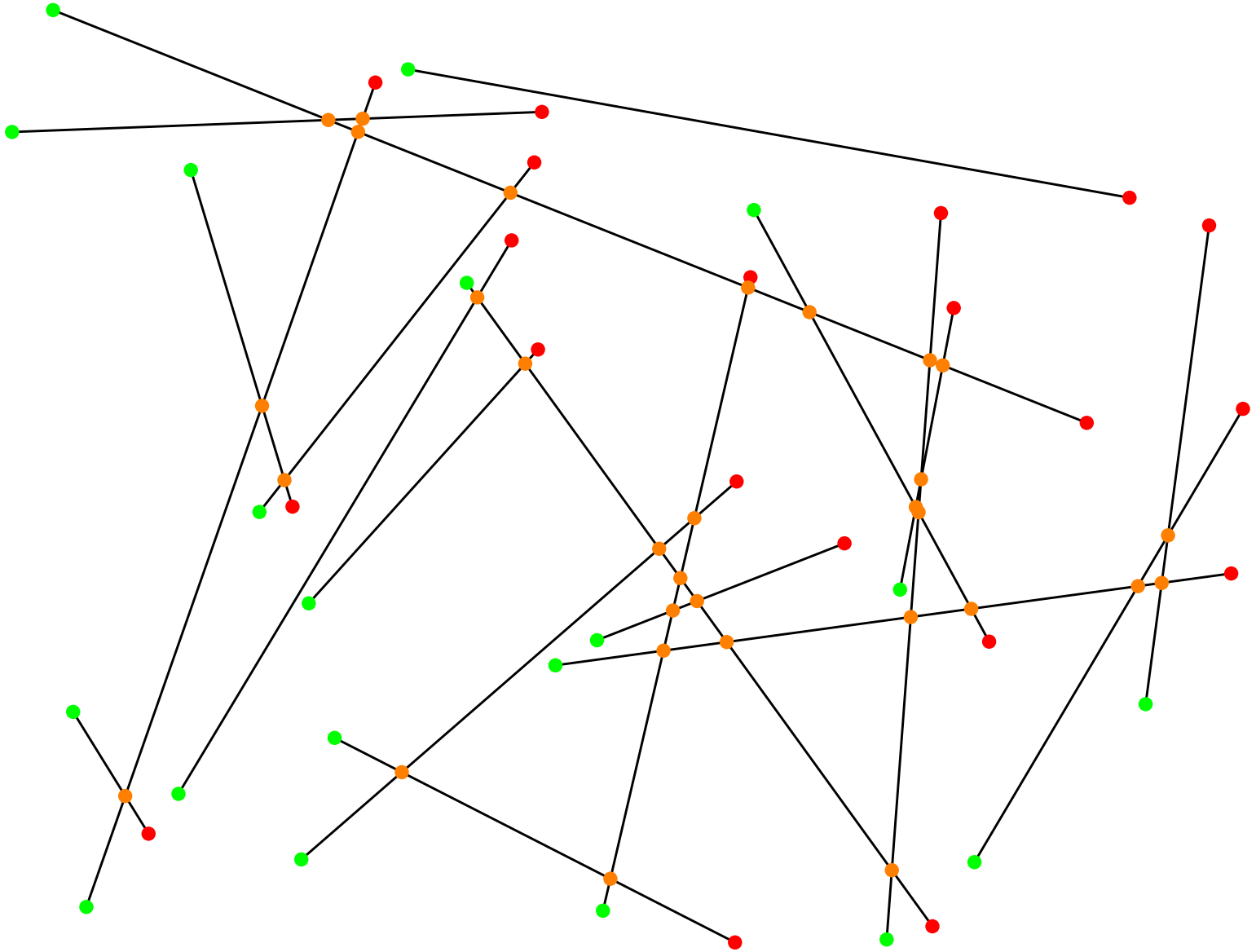
Operationen:

1. Einfügen einer Zahl x
2. Löschen einer Zahl x
3. Ausgabe aller gespeicherter Zahlen in $[a, b]$

Welche Datenstrukturen sind geeignet?

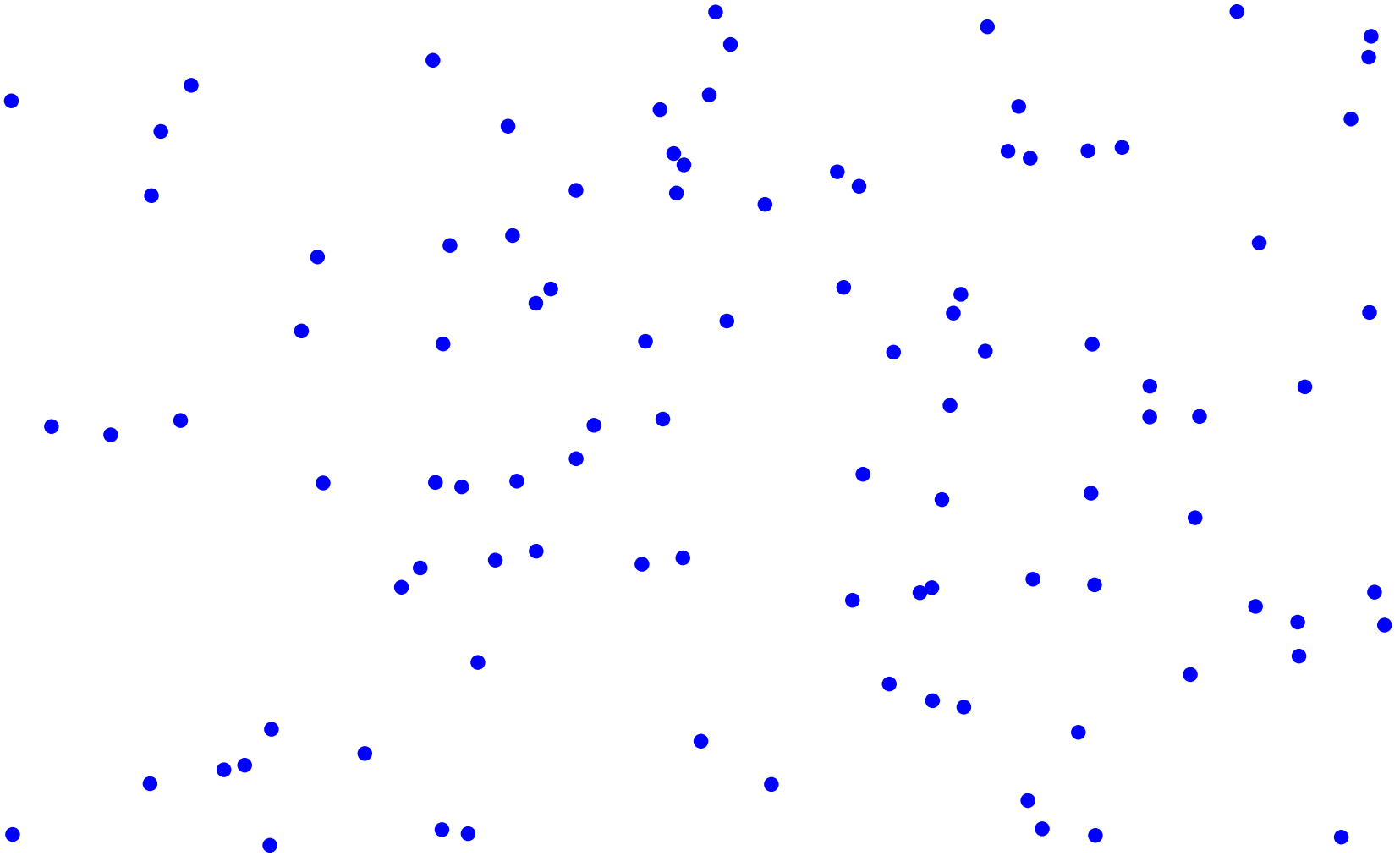
- Arrays?
- Listen?
- AVL-Bäume?
- Splay-Bäume?
- $(2, 3)$-Bäume?
- Treaps?
- Skiplists?
- Hashtabellen?

Das allgemeine Segmentschnittproblem

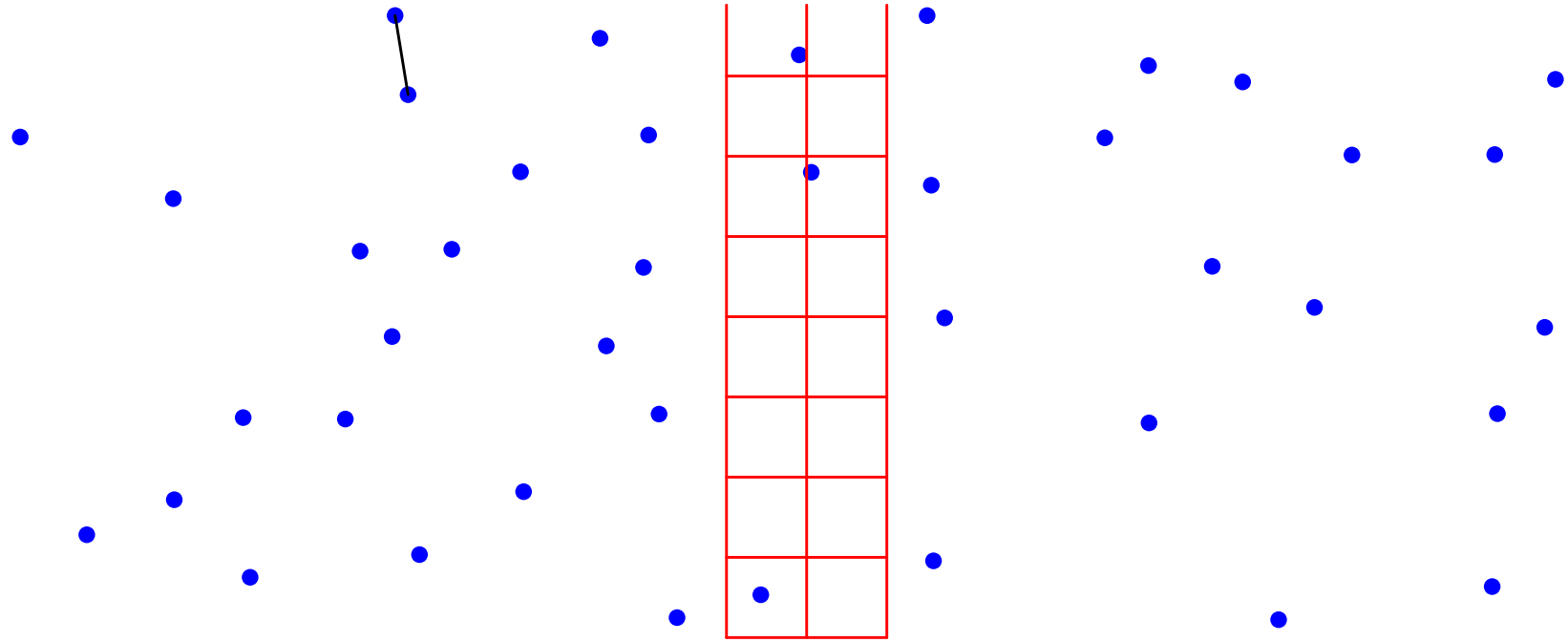


Laufzeit: $O(n \log n + |S|)$

Nächste Nachbarn



Nächste Nachbarn – Divide-and-Conquer



1. Sortiere nach x-Koordinate
2. Teile in linke und rechte Hälfte
3. Finde rekursiv nächste Nachbarn links und rechts (Abstand d)
4. Finde nächste Nachbarn in einem Streifen der Breite $2d$ um die Trennlinie

Nächste Nachbarn – Analyse

Es sei $T(n)$ die Zeit, um n Punkte zu bearbeiten, nachdem sie nach x-Koordinate sortiert wurden.

Nehmen wir an, n sei eine Zweierpotenz.

Wir müssen zwei Probleme der Größe $n/2$ lösen und anschließend die Punkte im Mittelstreifen behandeln.

Es ergibt sich diese Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

Dies ist die selbe Rekursionsgleichung wie für Mergesort.

Laufzeit: $O(n \log n)$

Textalgorithmen – Stringmatching

Eingabe: Zwei Strings v und w

Frage: Kommt v als Unterstring in w vor?

Genauer:

$u, v \in \Sigma^*$, wobei Σ ein Alphabet ist.

Gibt es $x, y \in \Sigma^*$, so daß $xvy = w$ gilt?

Freie Monoide

Definition

Ein Alphabet Σ ist eine nichtleere, endliche Menge von Symbolen.

Ein Monoid $(M, e, \circ)$ ist eine Halbgruppe $(M, \circ)$ mit einem neutralem Element e.

Ein Monoid $(M, e, \circ)$ ist von $\Sigma \subseteq M$ frei erzeugt, wenn sich jedes $w \in M$ eindeutig als $w = a_1 \circ \cdots \circ a_n$ darstellen läßt, wobei $a_i \in \Sigma$.

Wir bezeichnen das von einem Alphabet Σ frei erzeugte Monoid mit Σ^*.

Homomorphismen

Definition

Es seien $(M_1, e_1, \circ)$ und $(M_2, e_2, \cdot)$ zwei Monoide.

Eine Abbildung $h\colon M_1 \to M_2$ ist ein (Monoid-)Homomorphismus, falls

1. $h(x \circ y) = h(x) \cdot h(y)$ für alle $x, y \in M_1$
2. $h(e_1) = e_2$

Ein bijektiver Homomorphismus ist ein Isomorphismus.

Freie Monoide

Theorem

Ist ein Monoid $(M, e, \circ)$ von einer Basis $B \subseteq M$ frei erzeugt, dann ist ein Homomorphismus auf M durch seine Bilder auf B bereits eindeutig bestimmt.

Beweis.

Es sei $h : M \to X$ ein Homomorphismus.
Dann ist $h(w) = h(a_1 \circ \ldots \circ a_n) = h(a_1) \cdot \ldots \cdot h(a_n)$. □

Theorem

Ein von einem Alphabet Σ frei erzeugtes Monoid ist bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweis.

Es seien $(M_1, e_1, \circ)$ und $(M_2, e_2, \cdot)$ von Σ frei erzeugte Monoide.

Es sei $h\colon M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus, den wir vermöge $h(a) = a$ für $a \in \Sigma$ festlegen.

Behauptung: h ist ein Isomorphismus.

Wir müssen beweisen, daß h injektiv und surjektiv ist.

- $u \neq v \Rightarrow u_1 \dots u_n \neq v_1 \dots v_m \Rightarrow h(u_1) \dots h(u_n) \neq h(v_1) \dots h(v_m) \Rightarrow h(u) \neq h(v)$
- $u \neq v \Leftarrow u_1 \dots u_n \neq v_1 \dots v_m \Leftarrow h(u_1) \dots h(u_n) \neq h(v_1) \dots h(v_m) \Leftarrow h(u) \neq h(v)$

□

Stringmatching

Sei Σ ein Alphabet.

1. $u = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ mit $a_i \in \Sigma$
2. $v = b_1 \dots b_m \in \Sigma^*$ mit $b_i \in \Sigma$

Frage: Kommt v in u vor?

Genauer: Gibt es ein j, so daß $b_i = a_{j+i}$ für alle $1 \leq i \leq m$?

Direkter Algorithmus: Probiere alle j.

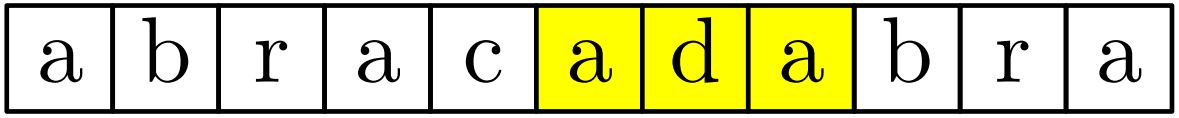
a	b	r	a	c	a	d	a	b	r	a

Fenster der Länge m gleitet über u.

Laufzeit $\Theta(n \cdot m)$

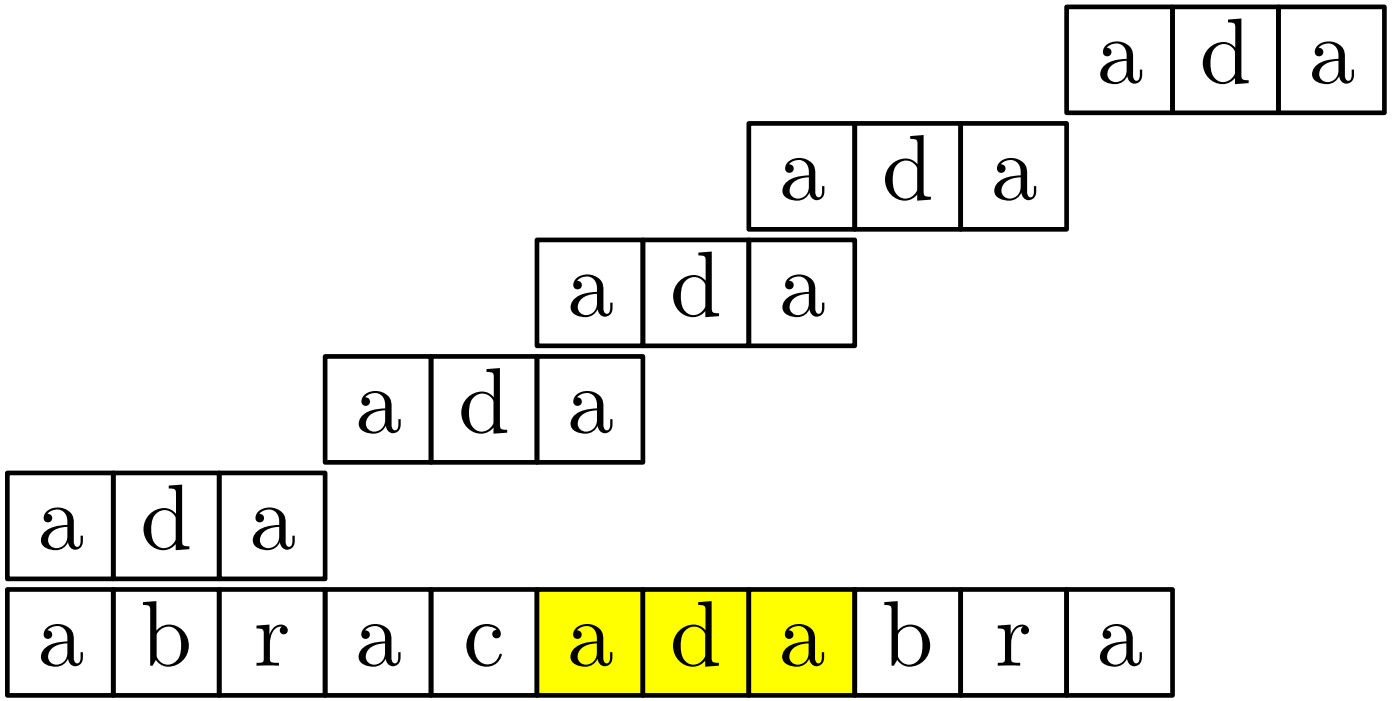
Stringmatching

Wie kann der naive Algorithmus verbessert werden?



1. Von hinten vergleichen
2. Fenster möglichst weit verschieben
3. v vor der Suche analysieren und Hilfstabellen erstellen

Stringmatching



Verschiebe Fenster um $\delta(x)$, wenn x der erste Mismatch von hinten ist.

Wie berechnen wir $\delta(x)$?

Algorithmus von Boyer und Moore (vereinfacht)

Algorithmus

function *Boyer* − *Moore*1(u, v) *integer* :
$i := |v|; j := |v|;$
repeat
  if $u[i] = v[i]$
  then $i := i - 1; j := j - 1$
  else
    if $|v| - j + 1 > delta(u[i])$ **then** $i := i + |v| - j + 1$
      else $i := i + delta(u[i])$ **fi**;
    $j := |v|$
  fi
until $j < 1$ **or** $i > |u|$;
return $i + 1$

Algorithmus von Boyer und Moore

Diese einfache Variante hat Worst-Case-Laufzeit $O(|u| \cdot |v|)$.

Praktisch ist sie aber sehr bewährt und zeigt oft die Laufzeit $O(|u|/|v|)$.

Durch eine Modifikation läßt sich die Worst-Case-Laufzeit $O(|u| + |v|)$ erzielen.

In der Praxis lohnt sich das allerdings nicht.