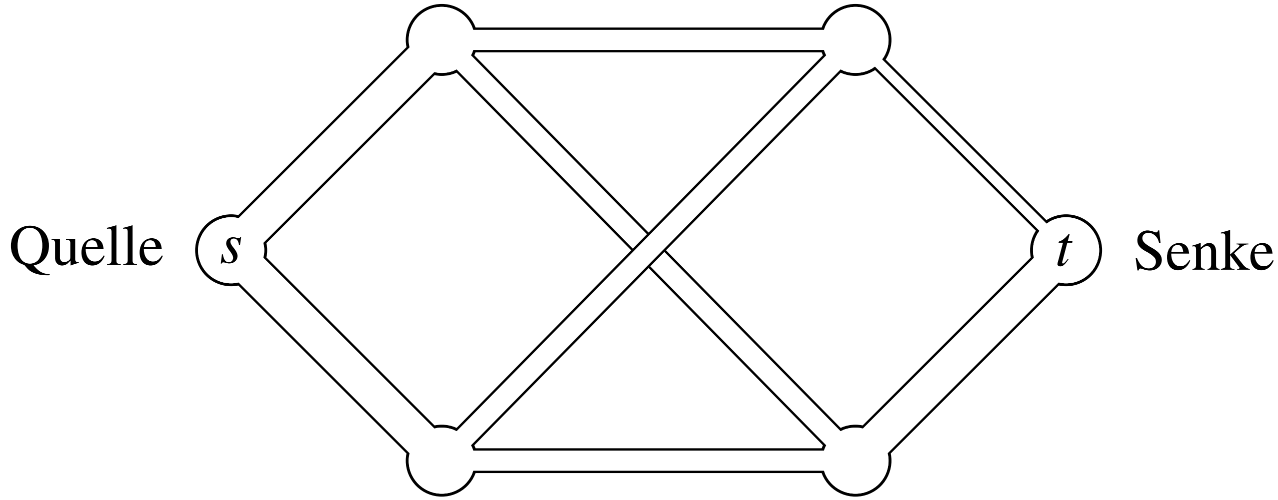
Netzwerkfluß

Gegeben ist ein System von Wasserrohren:

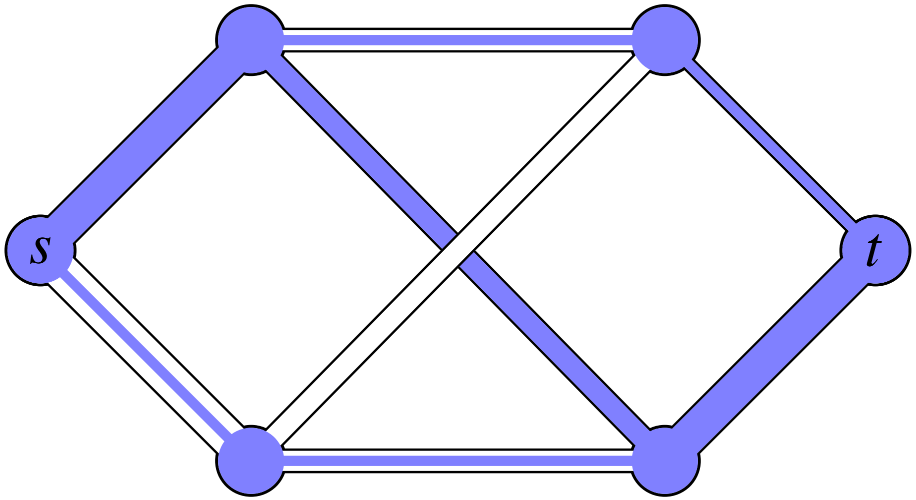


Die Kapazität jedes Rohres ist 3, 5 oder 8 l/s.

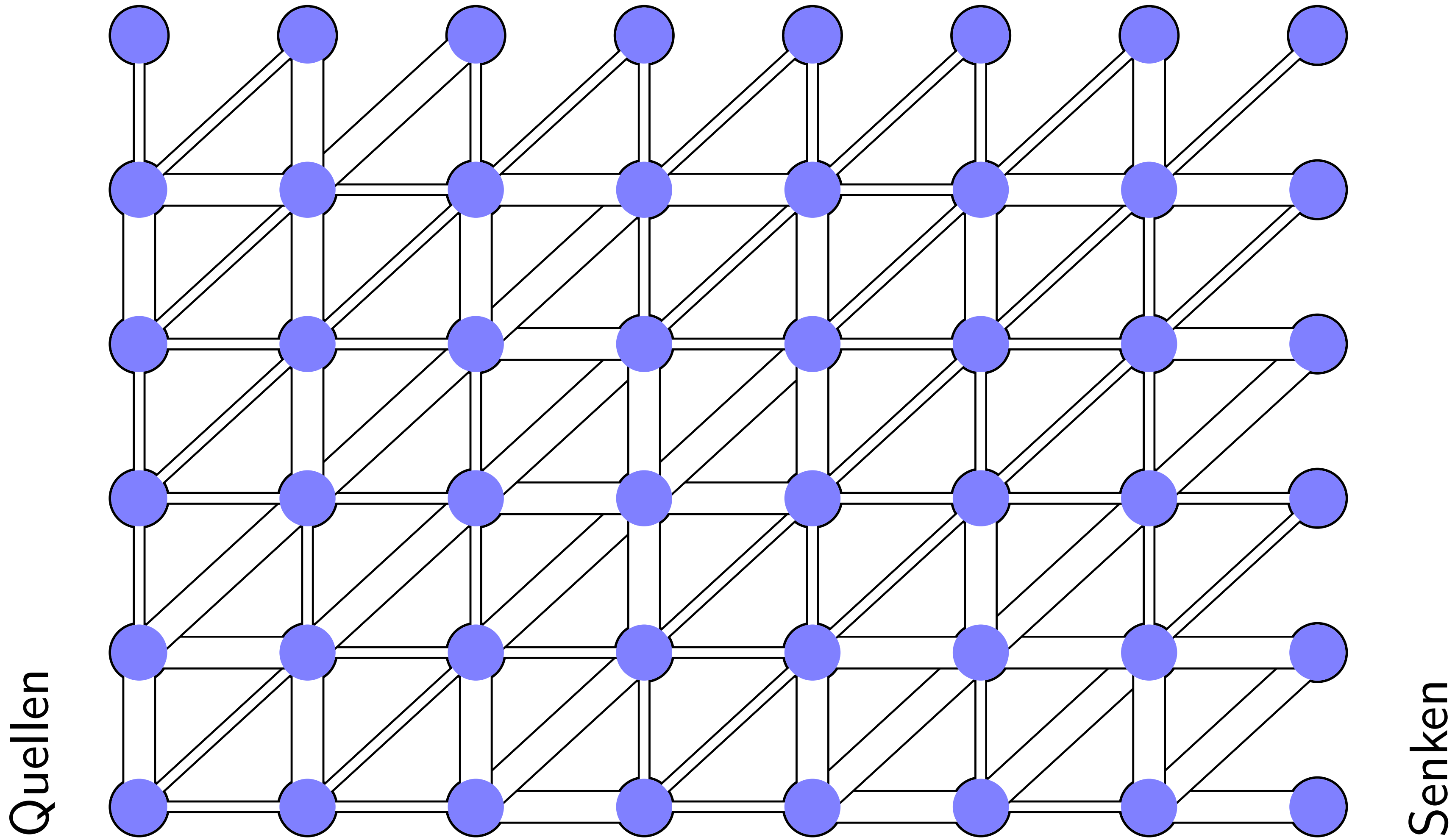
Frage: Wieviel Wasser kann von der Quelle zur Senke fließen?

Netzwerkfluß

Antwort: Maximal 11 l/s sind möglich.

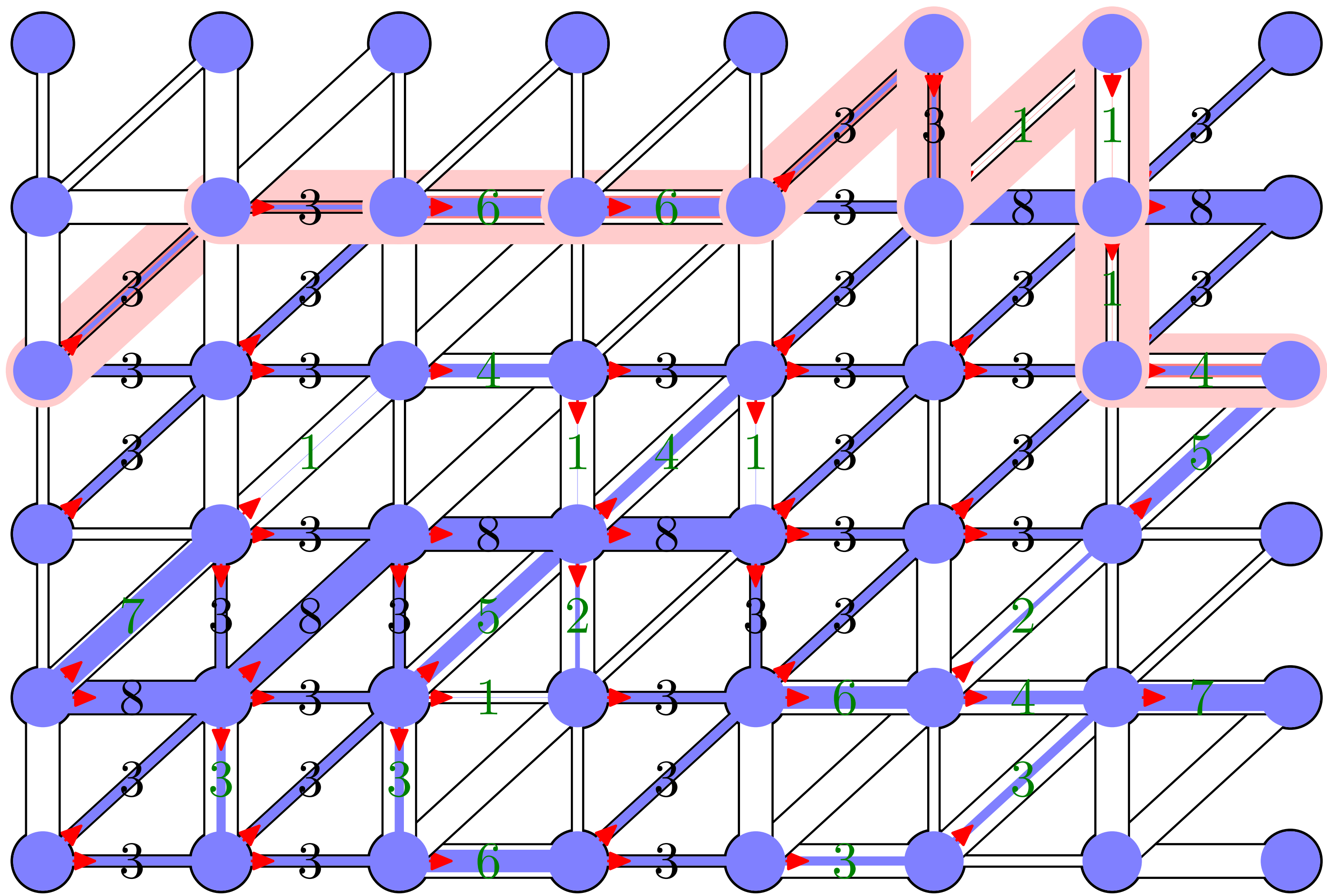


Netzwerkfluß – Aufgabe



Die Kapazitäten sind 3 und 8.

Netzwerkfluß – Lösung



Der maximale Fluß beträgt 30.

s-t-Netzwerke

Definition

Ein *s-t-Netzwerk* (flow network) ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, wobei

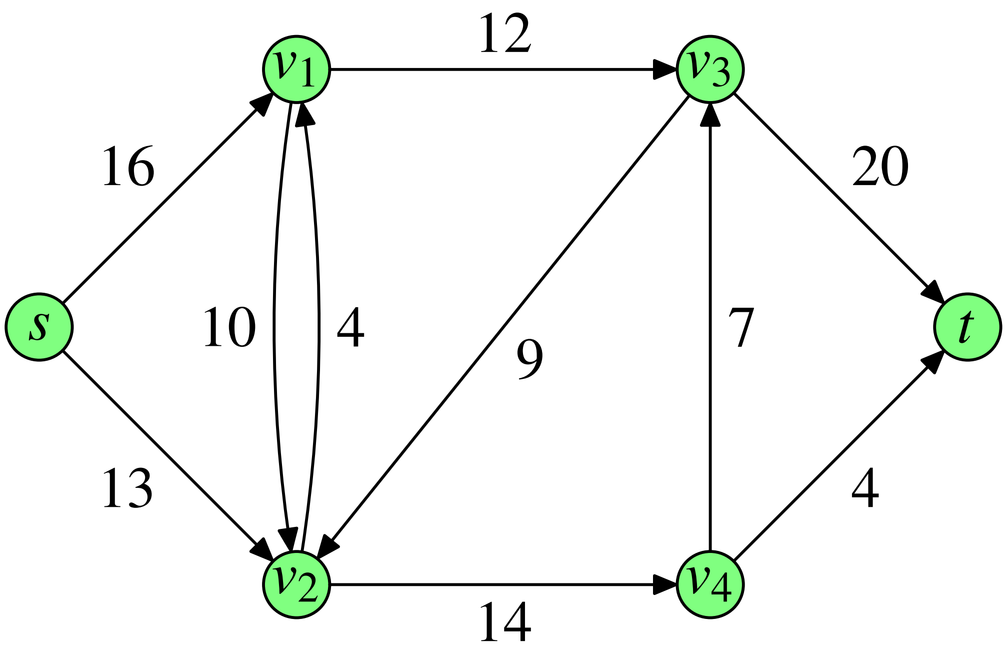
1. jede Kante $(u, v) \in E$ eine Kapazität $c(u, v) \geq 0$ hat,
2. es eine Quelle $s \in V$ und eine Senke $t \in V$ gibt.

Es ist bequem, anzunehmen daß jeder Knoten auf einem Pfad von s nach t liegt.

Falls $(u, v) \notin E$ setzen wir $c(u, v) = 0$.

Es kann Kanten (u, v) und (v, u) mit verschiedener Kapazität geben.

Beispiel eines s-t-Netzwerks



Die Kanten sind mit den Kapazitäten $c(u, v)$ beschriftet.

Flüsse

Definition

Ein Fluß ist eine Funktion $f\colon V \times V \to \mathbf{R}$, die Paare von Knoten auf reelle Zahlen abbildet und diese Bedingungen erfüllt:

- Zulässigkeit: Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) \le c(u, v)$.
- Symmetrie: Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) = -f(v, u)$.
- Flußerhaltung: Für $u \in V - \{s, t\}$ gilt $\sum\limits_{v \in V} f(u, v) = 0$.

Der Wert $|f|$ eines Flusses ist definiert als $|f| = \sum\limits_{u \in V} f(s, u)$.

Dies ist gerade der Gesamtfluß aus der Quelle heraus.

Maximale Flüsse

Das Problem des maximalen Flusses:

Gegeben: Ein s-t-Netzwerk.

Gesucht: Ein Fluß mit maximalem Wert.

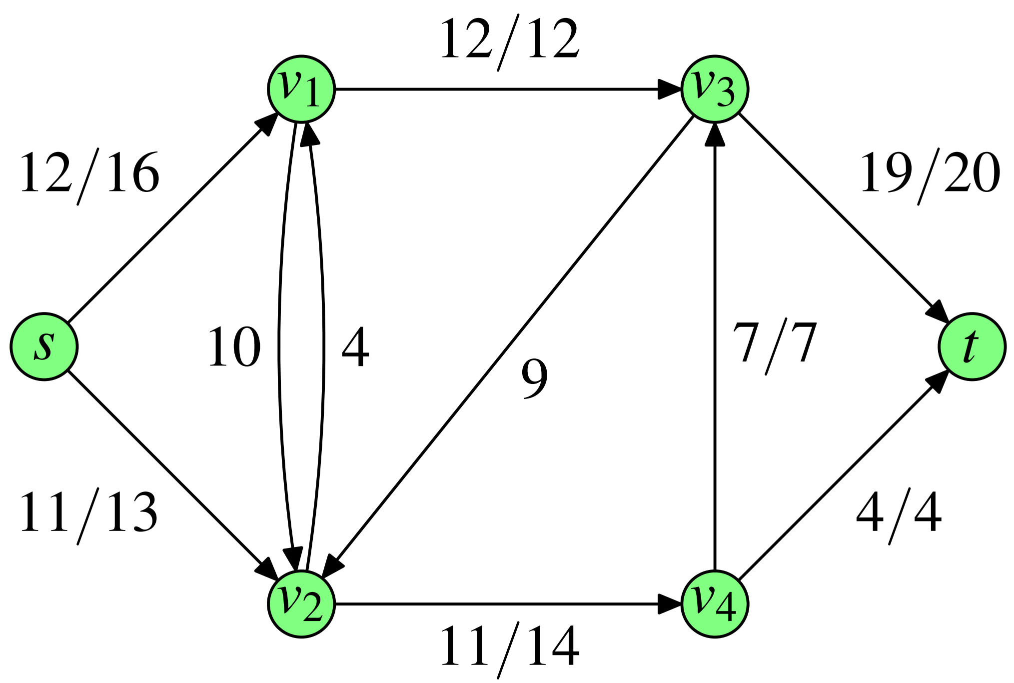
Viele Anwendungen

Beispiel: Wieviele Leitungen müssen zerstört sein, damit zwei Computer nicht mehr miteinander kommunizieren können.

Weiteres Beispiel: ISS-Problem

- Weltraumtouristen machen Angebote
- Sie benötigen spezielle Ausrüstung
- Ausrüstung kann mehrfach benutzt werden
- Wer soll mitgenommen werden?

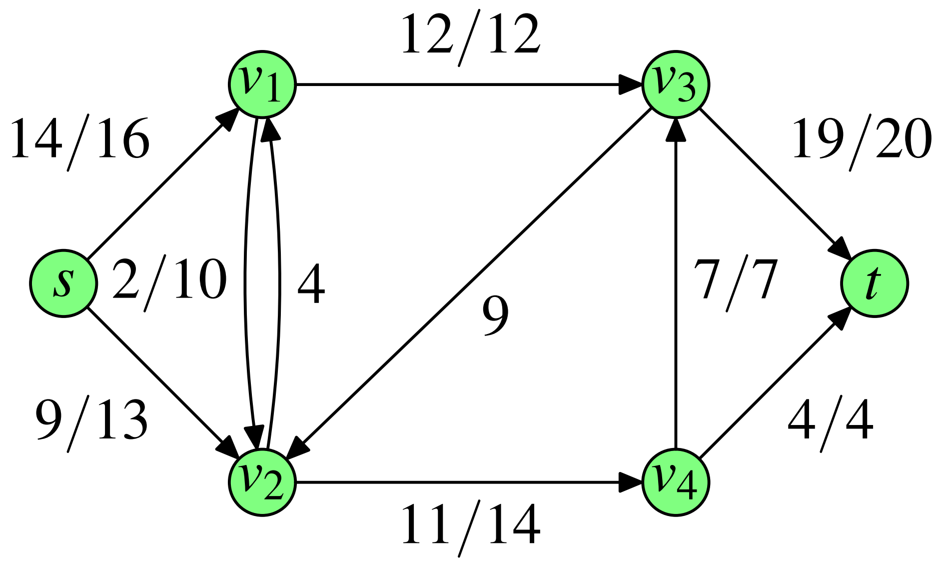
Was ist der maximale Fluß?

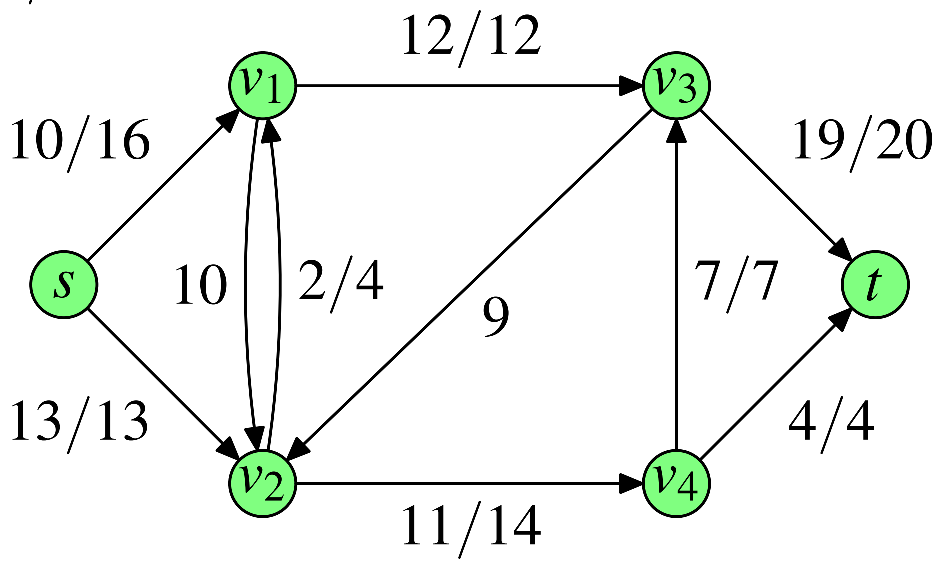


Der maximale Fluß ist 23.

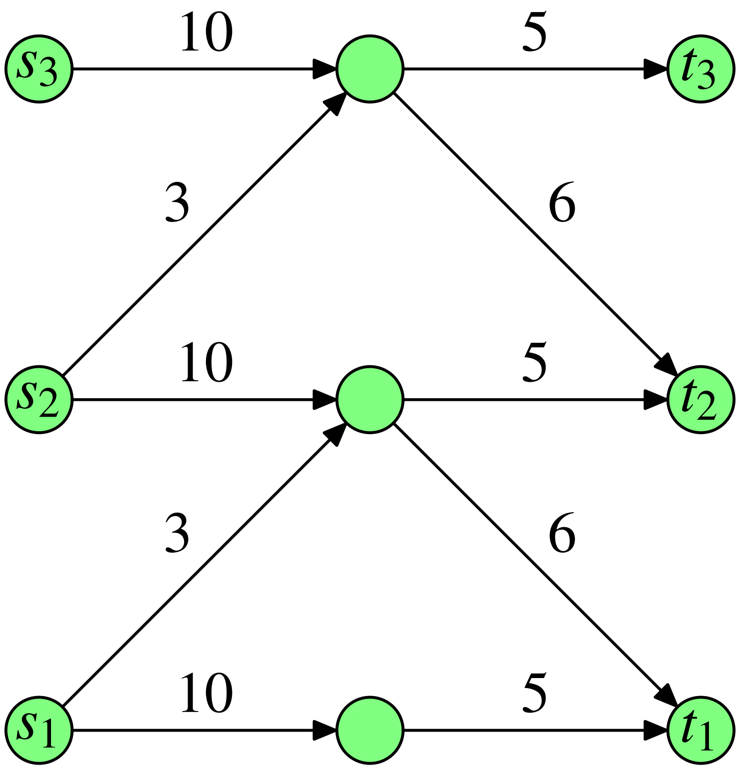
Die Kanten sind mit $c(u, v)$ beschriftet oder mit $f(u, v)/c(u, v)$, falls $f(u, v) > 0$.

Andere optimale Lösungen



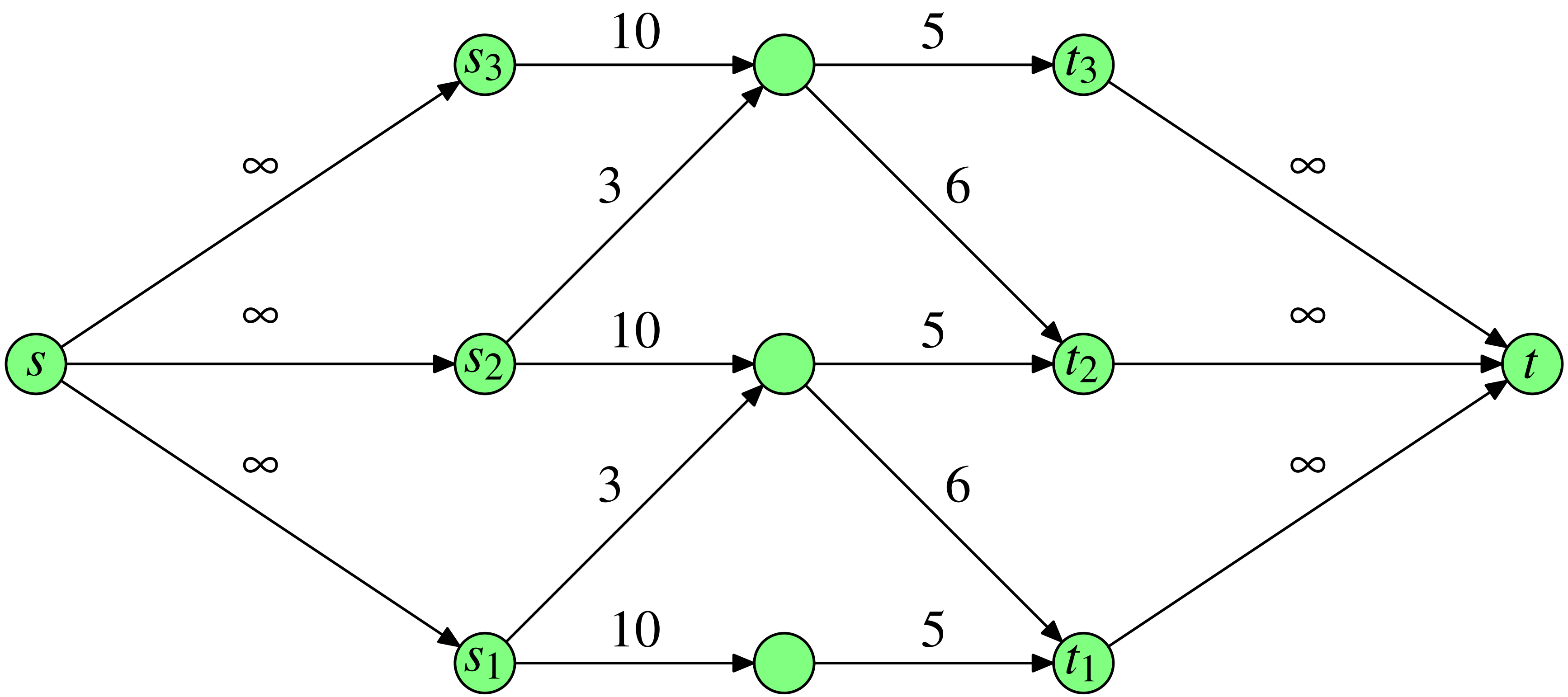


Mehrfache Quellen oder Senken



Mehrfache Quellen oder Senken sind eine Verallgemeinerung des Problem des maximalen Flusses.

Mehrfache Quellen oder Senken



→ Neue „Superquelle“ und „Supersenke“ hinzufügen.

Existenz des maximalen Flusses

Existiert stets der maximale Fluß

$$\max\Big\{\, |f| \;\Big|\; f \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Fluß in } G \,\Big\}?$$

Ja, denn die Menge aller Flüsse ist abgeschlossen im $\mathbf{R}^m$ und sie ist nicht leer.

Die stetige Funktion, die einen Fluß auf ihren Wert abbildet, hat daher ein Maximum:

$$|f| = \sum_{u \in V} f(s, u) \text{ ist stetig!}$$

(Satz von Weierstrass)

Einige Notationen

Es ist bequem einige Abkürzungen zu verwenden:

- $f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$ für $X, Y \subseteq V$
- $f(x, Y) = \sum_{y \in Y} f(x, y)$ für $Y \subseteq V$
- $f(X, y) = \sum_{x \in X} f(x, y)$ für $X \subseteq V$
- $X - y$ statt $X - \{y\}$

Lemma A

Falls f ein s-t-Fluß für $G = (V, E)$ ist, dann gilt:

1. $f(X, X) = 0$ für $X \subseteq V$
2. $f(X, Y) = -f(Y, X)$ für $X, Y \subseteq V$
3. $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$
4. $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$ für $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$

Dieses Lemma ist sehr nützlich, um wichtige Eigenschaften über Flüsse abzuleiten.

Lemma A

Um Lemma A zu beweisen, dürfen wir nur die Eigenschaften eines s-t-Flusses verwenden, also Zulässigkeit, Symmetrie und Flußerhaltung.
Beweis für $f(X, X) = 0$:

$$\begin{aligned} f(X,X) &= \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X} f(x_1,x_2) + \sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X} f(x_1,x_2)\Bigr) \\ &= \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X} f(x_1,x_2) + \sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X} f(x_2,x_1)\Bigr) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X}\Bigl(f(x_1,x_2) + f(x_2,x_1)\Bigr) = 0 \end{aligned}$$

Hier genügt die Symmetrie allein! (Rest als Übungsaufgabe.)

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Residualnetzwerke

„Netzwerk minus Fluß = Residualnetzwerk“

Definition

Gegeben ist ein Netzwerk $G = (V, E)$ und ein Fluß f. Das Residualnetzwerk $G_f = (V, E_f)$ zu G und f ist definiert vermöge

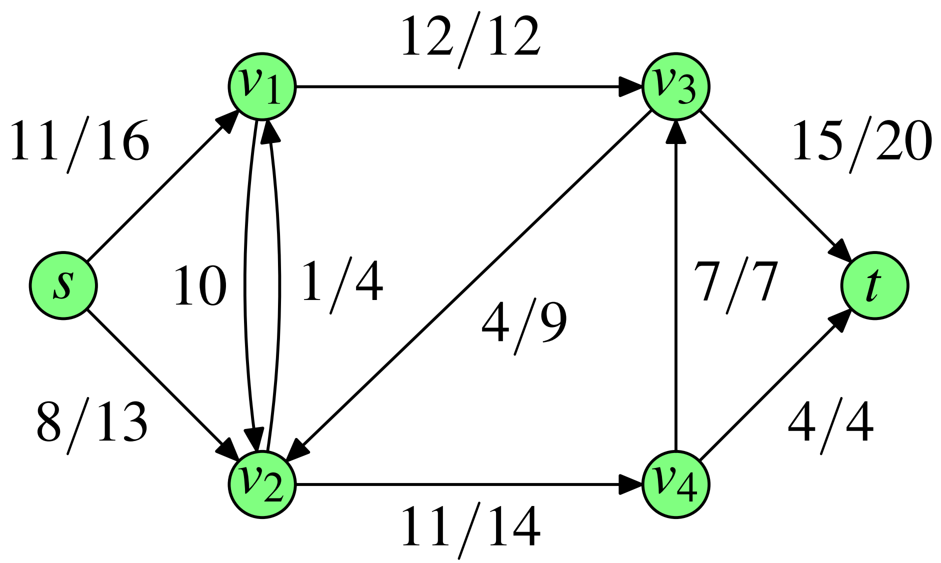
$$E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \},$$

wobei

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v).$$

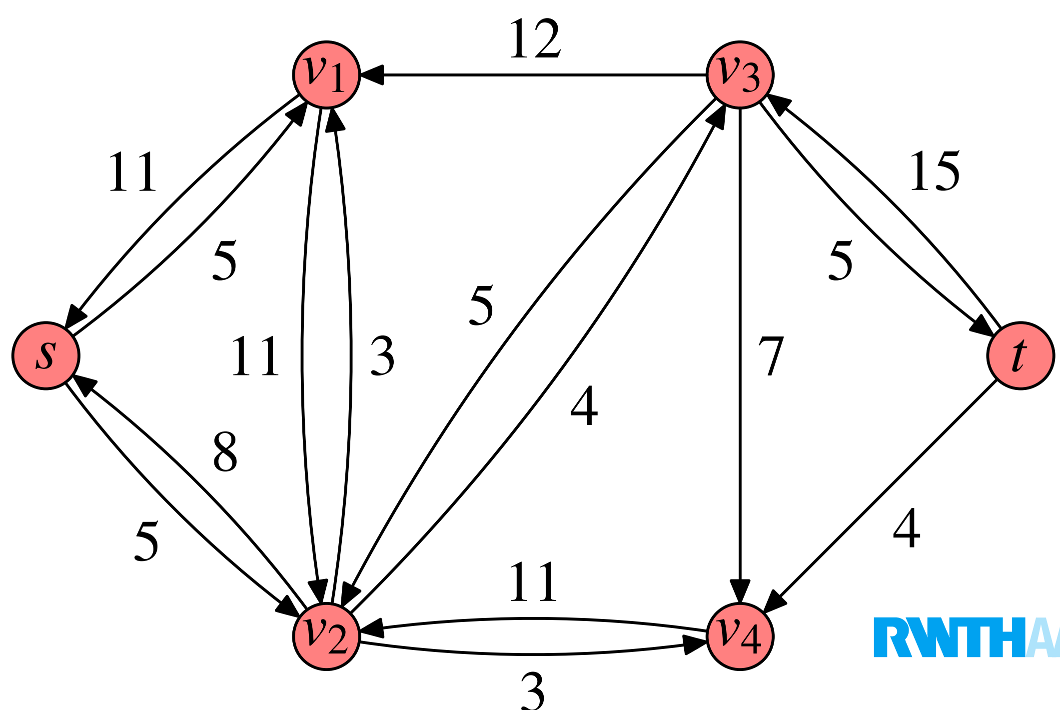
c_f ist die Restkapazität.
Das s-t-Netzwerk G_f hat die Kapazitäten c_f.

Beispiel



s-t-Netzwerk mit Fluß f

Residualnetzwerk G_f

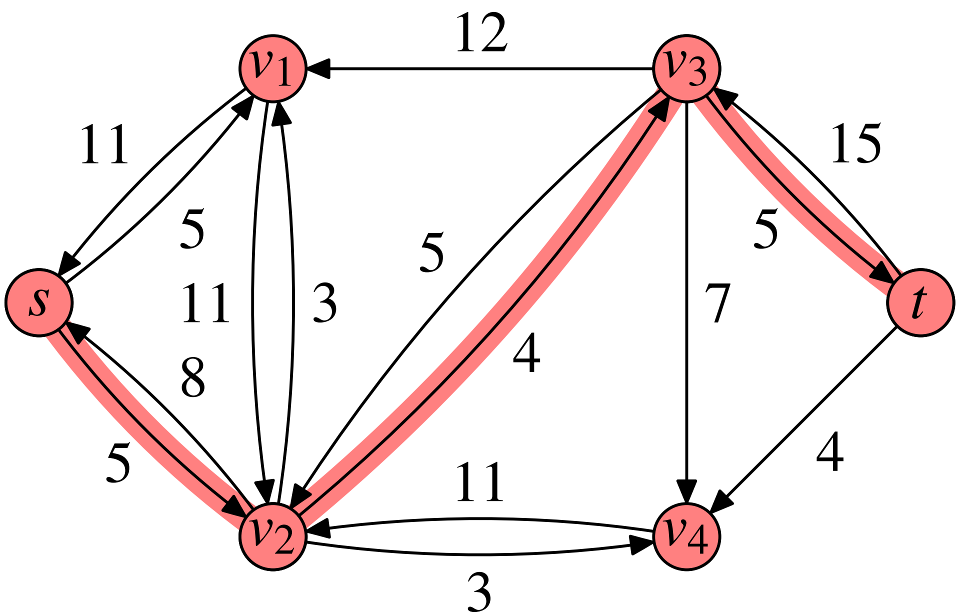


Augmentierende Pfade

Ein s-t-Pfad p in G_f heißt augmentierender Pfad.

$c_f(p) = \min\{\, c_f(u,v) \mid (u,v) \text{ ist auf } p \,\}$ heißt Restkapazität von p.

Beispiel:



Die Restkapazität dieses Pfades ist 4.

Die Ford–Fulkerson–Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluß f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p
return f

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u,v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v,u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Augmentiere f entlang p: $f := f + f_p$

f_p ist ein Fluß in G_f