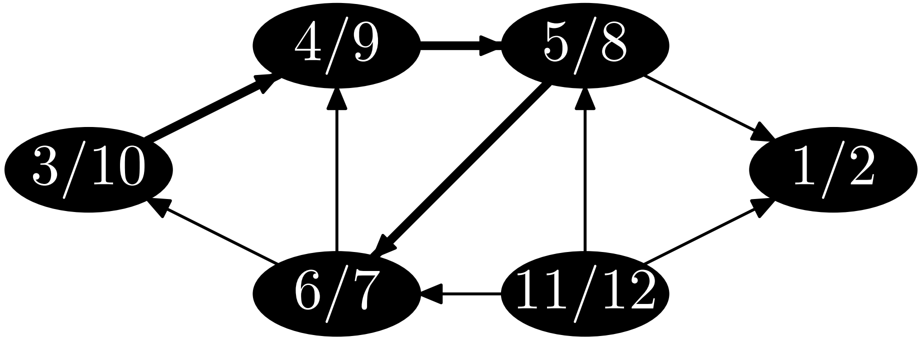
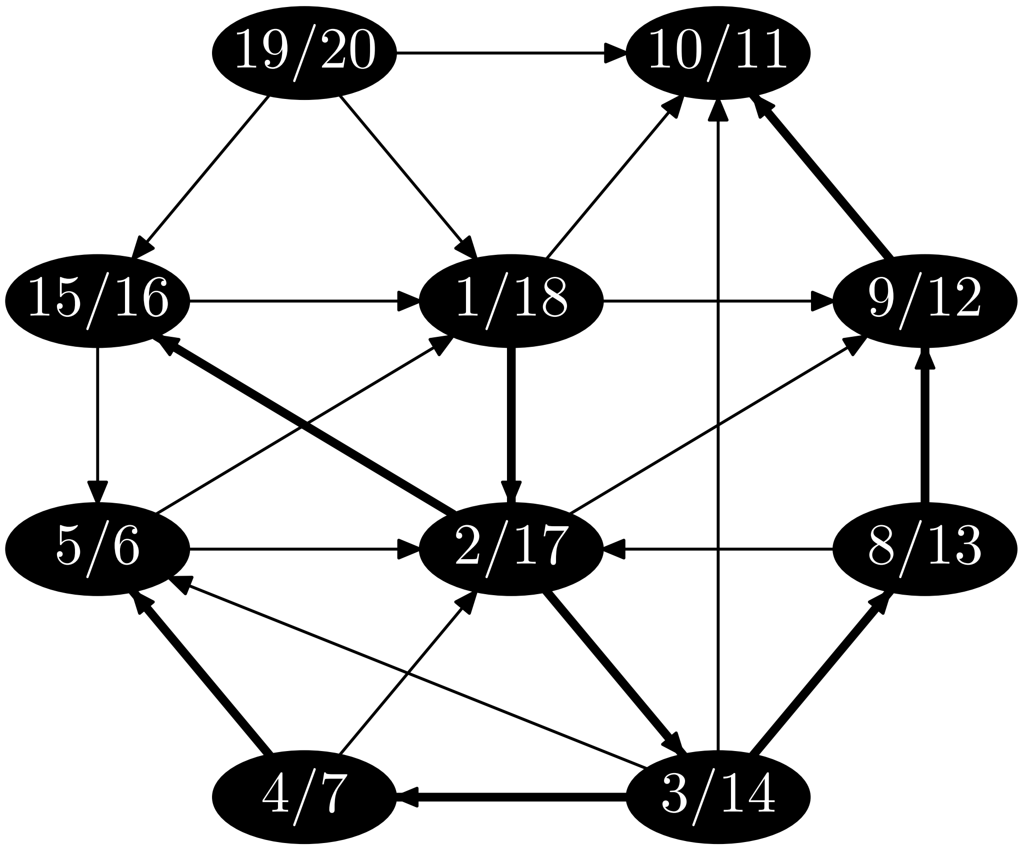
Taxonomie der Kanten



1. Eine Baumkante ist im DFS-Wald (geht von einem Knoten zu einem seiner Kinder im DFS-Wald).
2. Eine Vorwärtskante geht von einem Knoten zu einem seiner Nachfahren im DFS-Wald (aber nicht Kind).
3. Eine Rückwärtskante geht von einem Knoten zu einem seiner Vorfahren im DFS-Wald.
4. Eine Querkante verbindet zwei im DFS-Wald unvergleichbare Knoten.

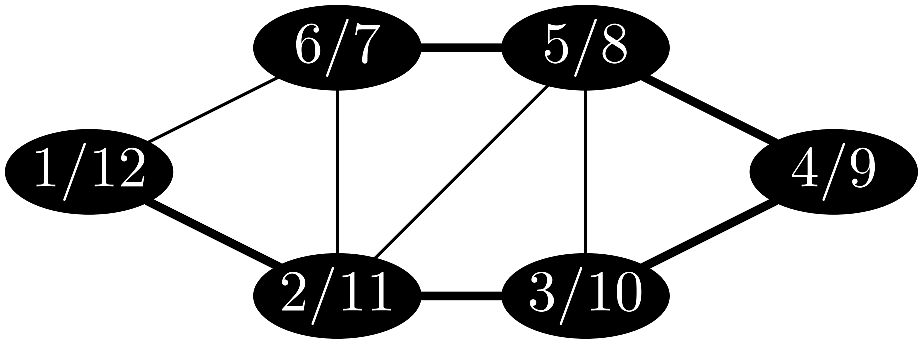
Frage: Welchen Typ hat jede Kante in diesem Beispiel?

Taxonomie der Kanten



Frage: Welchen Typ hat jede Kante in diesem Beispiel?

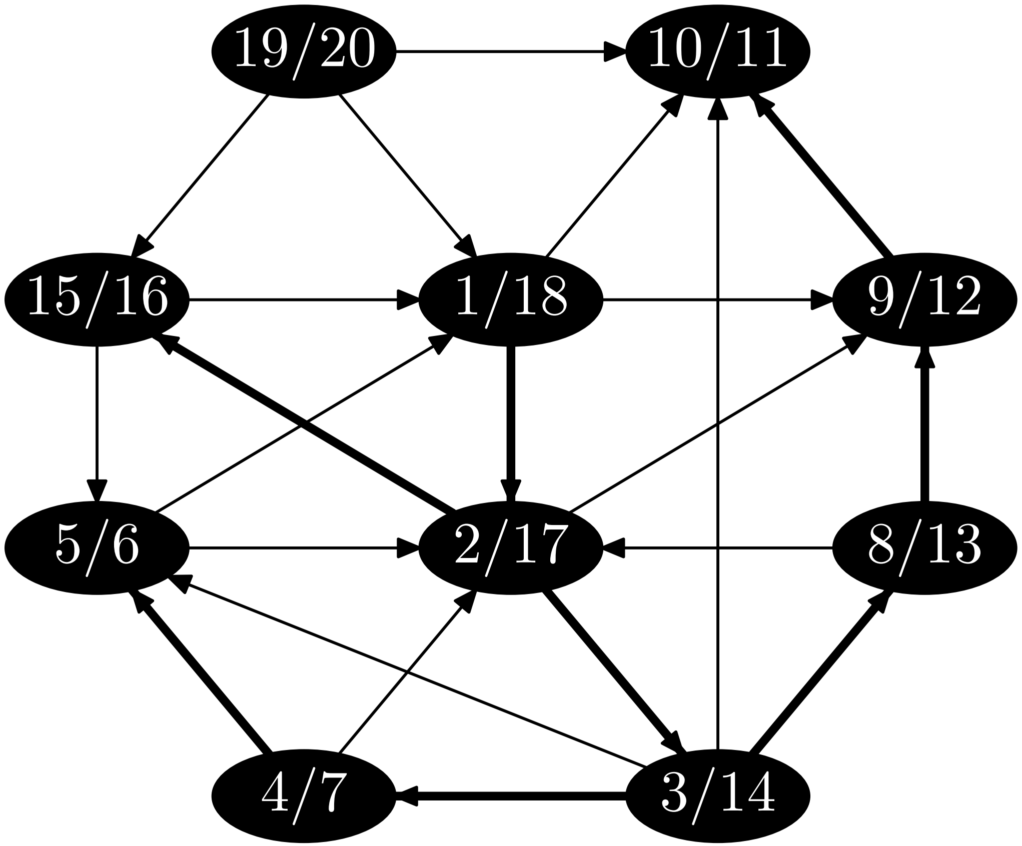
DFS – Ungerichtete Graphen



Wir erhalten immer einen Baum, wenn der Graph zusammenhängend ist.

Implementierung: Eine ungerichtete Kante wird durch Kanten in beide Richtungen dargestellt.

Taxonomie der Kanten



Betrachte Kante (u, v):

1. $d(u) < d(v)$ und $f(v) < f(u) \iff$ Baum- oder Vorwärtskante
2. $d(v) < d(u)$ und $f(u) < f(v) \iff$ Rückwärtskante
3. sonst Querkante

Tiefensuche

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ (in Adjazenzlistendarstellung).
Durch Tiefensuche kann ein DFS-Wald inklusive der Funktionen $d: V \to \mathbf{N}$, $f: V \to \mathbf{N}$ in $O(|V| + |E|)$ Schritten (also in linearer Zeit) berechnet werden.

Beweis.

(Skizze) Solange ein Knoten grau ist, wird jede inzidente Kante einmal besucht. Jeder Knoten wechselt seine Farbe nur zweimal, jedesmal mit konstantem Aufwand.
Jede Kante wird daher ebenfalls nur einmal besucht. $\square$

Zusammenhangskomponenten

Definition

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Pfad der Länge k von u_1 nach u_{k+1} ist eine Folge $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_k, u_{k+1})$ von Kanten aus E wobei $u_1, \dots, u_{k+1}$ paarweise verschieden sind.

Wir sagen u und v sind zusammenhängend, wenn es einen Pfad von u nach v gibt.

Eine Menge $C \subseteq V$ ist eine Zusammenhangskomponente, wenn alle Knoten in C zusammenhängend sind und es keine echte Obermenge von C mit dieser Eigenschaft gibt.
(Alternativ: Die Zusammenhangskomponenten sind die Äquivalenzklassen der Relation „zusammenhängend".)

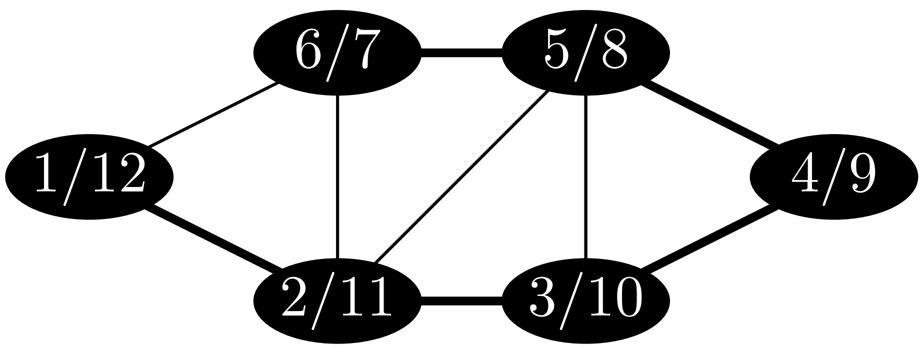
Zusammenhangskomponenten

Theorem

Die Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen können in linearer Zeit gefunden werden.

Beweis.

Die Knoten, die jeweils in einem Aufruf der Tiefensuche schwarz werden, gehören zu einer Komponente. □



Finden von Kreisen

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter Graph G. Dann können wir in linearer Zeit feststellen, ob G azyklisch ist (keine Kreise enthält).

Beweis.

Führe eine Tiefensuche auf G aus.

Behauptung: G ist genau dann azyklisch, wenn es keine Rückwärtskanten gibt.

$\Rightarrow$ Wenn es eine Rückwärtskante von u nach v gibt, dann gibt es auch einen Pfad von v nach u im DFS-Wald. Dies ist ein Kreis.

$\Leftarrow$ Angenommen es gibt einen Kreis. Sei u der Knoten auf dem Kreis mit minimalem $d(u)$ und v der Knoten auf dem Kreis vor u. Dann gilt $d(u) < d(v)$ und $f(v) < d(u)$.

Also ist (v, u) eine Rückwärtskante. $\square$

Starke Zusammenhangskomponenten

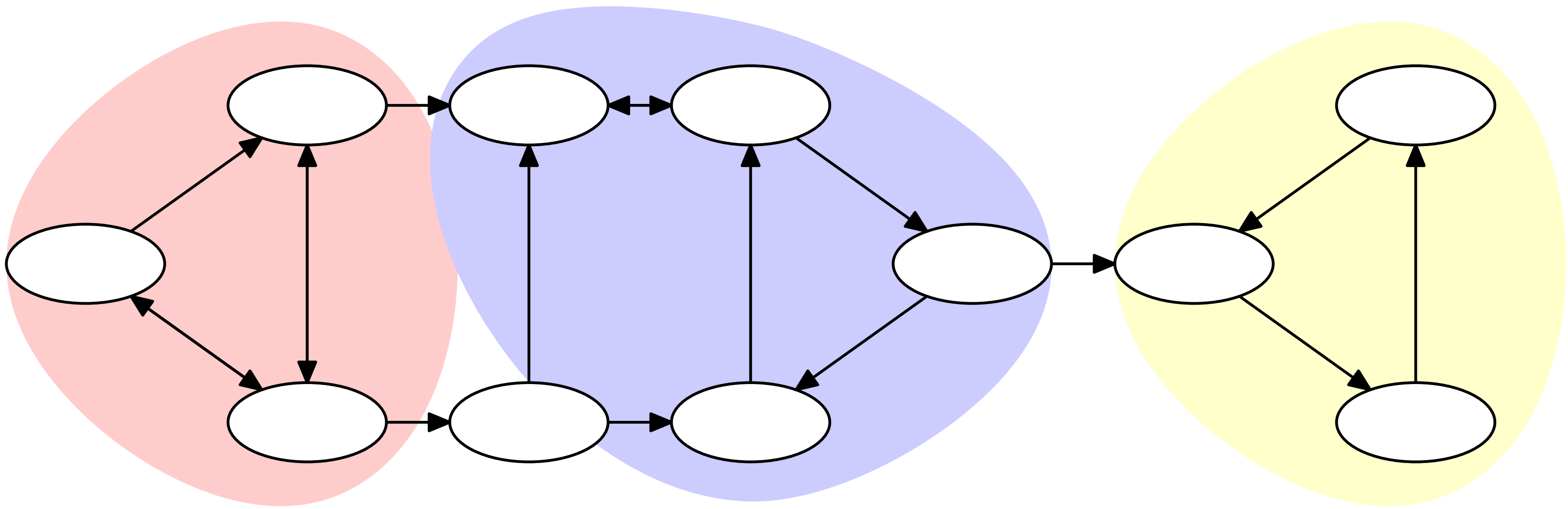
Definition

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Pfad der Länge k von u_1 nach u_{k+1} ist eine Folge $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_k, u_{k+1})$ von Kanten aus E wobei $u_1, \ldots, u_{k+1}$ paarweise verschieden sind.

Eine Menge $C \subseteq V$ ist eine starke Zusammenhangskomponente, wenn es Pfade zwischen allen Paaren von Knoten in C gibt und es keine echte Obermenge von C mit dieser Eigenschaft gibt.

Die starken Komponenten sind eine Verfeinerung der Zusammenhangskomponenten des entsprechenden ungerichteten Graphen.

Starke Komponenten – Beispiel



Es gibt genau vier starke Komponenten.