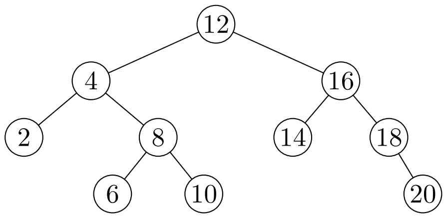
RWTH Aachen **SoSe 2007**
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Kneis—Mölle—Richter—Rossmanith 31.07.2007

Klausur zur Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Ein gerichteter Graph mit n Knoten ist genau dann azyklisch, wenn er n starke Zusammenhangskomponenten besitzt.

b) Gegeben sei der rechts abgebildete AVL-Baum. Was passiert, wenn wir die 16 löschen? Welche Rotationen werden dabei ausgeführt? Wie sieht der Baum am Ende aus?



Lösungsvorschlag

Wir lösen zuerst Teil (a). Jede starke Zusammenhangskomponente umfasst mindestens einen Knoten, so daß es maximal n solcher Komponenten geben kann. Wir beweisen beide Richtungen der behaupteten Äquivalenz durch Kontraposition:

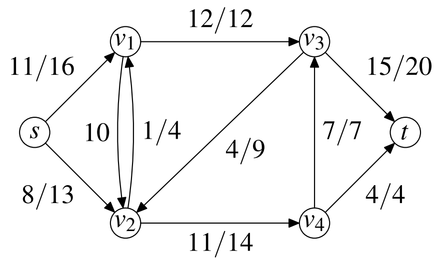
Existiert ein Zyklus, so umfasst dieser mindestens zwei Knoten u, v und Pfade von u nach v sowie von v nach u. Also liegen u, v in derselben Komponente – es kann dann höchstens noch $n - 1$ Komponenten geben.

Gibt es andererseits höchstens $n - 1$ Komponenten, dann hat eine davon mindestens zwei Knoten u, v – und somit offenbar einen Kreis, denn u ist von v und v ist von u aus erreichbar.

Wir kommen zu Teil (b). Zunächst wird die 16 mit dem größten Element ihres linken Teilbaums – also der 14 – vertauscht und unmittelbar danach gelöscht (was unproblematisch ist, weil 16 nun ein Blatt ist). Allerdings ist die AVL-Bedingung im jetztigen Knoten 14 verletzt: Der linke Teilbaum ist leer, der rechte ein Pfad der Länge zwei (18 und 20). Eine einfache Rotation behebt dieses Problem. Am Ende hängt rechts unter der Wurzel die 18, links davon die 14 und rechts die 20.

Aufgabe 2 (2+2+3+3 Punkte)

Gegeben ist das folgende Flußnetzwerk G zusammen mit einem Fluß f. (a) Wie groß ist $|f|$? (b) Geben Sie das zugehörige Residualnetzwerk an. (c) Welchen Wert v hat ein maximaler Fluß in G? (d) Wie beweisen Sie, daß v tatsächlich maximal ist?



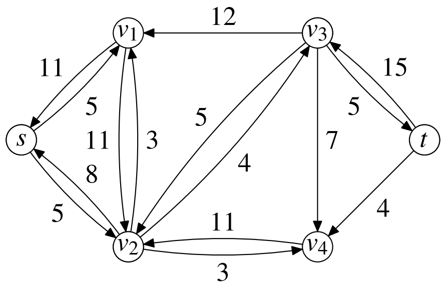
Lösungsvorschlag

(a) Der eingezeichnete Fluß f hat offenbar den Wert 19, weil aus dem Startknoten ein Fluß von $11 + 8$ austritt.

(b) Das Residualnetzwerk ist unten abgebildet.

(c) 23, wie der minimale Schnitt über den mit 12/12, 7/7 und 4/4 beschrifteten Kanten zeigt. Wir werden das aber anders beweisen:

(d) Im Residualnetzwerk kann man einen augmentierenden Pfad der Kapazität 4 finden ($s \searrow v_2 \nearrow v_3 \searrow t$) – und danach keinen weiteren mehr, wie das (hier nicht abgebildete) zugehörige Residualnetzwerk zeigt.



Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben sind die Schlüssel a, b, c und d. Auf sie wird mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2, 1/4, 1/8 und 1/8 zugegriffen. Konstruieren Sie einen optimalen Suchbaum für $\{a, b, c, d\}$.

Lösungsvorschlag
Für einen Suchbaum müssen die Elemente total geordnet sein, so daß wir $a < b < c < d$ (alles transitiv) annehmen wollen. Wir wenden dann die Methode zur Berechnung optimaler Suchbäume aus der Vorlesung an.
Zunächst berechnen wir die Werte $w_{i,j}$, beginnend mit der Diagonalen bei $i = j$. Natürlich muß $w_{a,d} = 1$ gelten. Danach entwickeln wir die übrigen Werte entlang aufsteigender Parallelen:

	a	b	c	d
a	1/2	?	?	1
b	–	1/4	?	?
c	–	–	1/8	?
d	–	–	–	1/8

	a	b	c	d
a	1/2	3/4	?	1
b	–	1/4	3/8	?
c	–	–	1/8	1/4
d	–	–	–	1/8

	a	b	c	d
a	1/2	3/4	7/8	1
b	–	1/4	3/8	1/2
c	–	–	1/8	1/4
d	–	–	–	1/8

Jetzt können wir die Werte

$$e_{i,j} = \min_{i \leq r \leq j} (e_{i,r-1} + e_{r+1,j}) + w_{i,j}$$

berechnen, und zwar in derselben Reihenfolge wie oben. Die Diagonalen sind wegen der Gleichheit $e_{i,i} = w_{i,i}$ schon bekannt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
e_{a,b} &= \min\{e_{a,\perp} + e_{b,b}, e_{a,a} + e_{c,b}\} + w_{a,b} = 1/4 + 3/4 = 1 && \text{mit } r = a,\\
e_{b,c} &= \min\{e_{b,a} + e_{c,c}, e_{b,b} + e_{d,c}\} + w_{b,c} = 1/8 + 3/8 = 1/2, && \text{mit } r = b,\\
e_{c,d} &= \min\{e_{c,b} + e_{d,d}, e_{c,c} + e_{\perp,d}\} + w_{c,d} = 1/8 + 1/4 = 3/8, && \text{mit z.B. } r = c,\\
e_{a,c} &= \min\{1/2, 1/2 + 1/8, 1\} + 7/8 = 1/2 + 7/8 = 11/8 && \text{mit } r = a,\\
e_{b,d} &= \min\{3/8, 1/4 + 1/8, 1/2\} + 1/2 = 3/8 + 1/2 = 7/8 && \text{mit z.B. } r = b,\\
e_{a,d} &= \min\{7/8, 1/2 + 3/8, 1 + 1/8, 11/8\} + 1 = 7/8 + 1 = 15/8 && \text{mit z.B. } r = a.
\end{aligned}$$

und somit z.B. einen nach rechts unten verlaufenden Pfad a, b, c, d als optimalen Suchbaum.

	a	b	c	d
a	1/2	1	11/8	15/8
b	–	1/4	1/2	7/8
c	–	–	1/8	3/8
d	–	–	–	1/8

Aufgabe 4 (10 Punkte)
In der Vorlesung bewiesen wir folgendes Theorem: Werden n verschiedene Elemente in zufälliger Reihenfolge in einen anfangs leeren binären Suchbaum eingefügt, dann ist der Erwartungswert seiner Höhe $O(\log n)$.
Wenden Sie dieses Theorem an, um zu beweisen, daß ein Treap mit n Elementen ebenfalls im Erwartungswert eine Höhe von $O(\log n)$ hat (unabhängig davon, welche Operationen zu seiner Entstehung führten).

Lösungsvorschlag

Lemma 1 *Gegeben seien n Schlüssel mit paarweise verschiedenen Prioritäten. Dann gibt es genau einen Treap, der diese Schlüssel und Prioritäten enthält. Dieser Treap hat die gleiche Form wie ein binärer Suchbaum, in den die Schlüssel in Reihenfolge der Prioritäten eingefügt wurden.*

Beweis. Die Wurzel ist eindeutig: Der Schlüssel mit minimaler Priorität. Wird sie in einen leeren Suchbaum als erste eingefügt, ist und bleibt sie die Wurzel des Suchbaums.
Der linke Unterbaum besteht aus allen kleineren Schlüsseln, genau wie beim binären Suchbaum. Der rechte Unterbaum besteht aus allen größeren Schlüsseln, genau wie beim binären Suchbaum.
Mit Induktion über die Anzahl der Elemente im Baum: Der linke und rechte Unterbaum sind eindeutig und entsprechen in der Form dem linken bzw. rechten Teilbaum beim binären Suchbaum.

Theorem 1 *Gegeben sei ein Treap der Größe n, dessen Prioritäten unabhängig und identisch gleichverteilt aus der Menge $\{1, \dots, m\}$ gezogen werden, wobei $m \geq n^3$. Dann ist die Höhe des Treaps im Erwartungswert $O(\log n)$.*

Beweis. Aus Symmetriegründen sieht man leicht, daß dank der Gleichverteilung der Prioritäten jede Permutation der Schlüssel gleichwahrscheinlich ist, wenn man die Schlüssel aufsteigend nach den Prioritäten ordnet. Mit dem Lemma und dem in der Aufgabenstellung gegebenen Theorem ist daher die Höhe eines Treaps im Erwartungswert $O(\log n)$, falls alle Prioritäten verschieden sind.
Betrachten wir also die Wahrscheinlichkeit für die Kollision von zwei Prioritäten: Seien $P_1, \dots, P_n$ die Prioritäten. Dann gilt $Pr[P_i = P_j] \leq 1/n^3$ für $i \neq j$. Es gibt weniger als n^2 Paare von Prioritäten. Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Paar identisch ist, ist höchstens

$$P = \sum_{i \neq j} Pr[P_i = P_j] \leq n^2/n^3 = 1/n.$$

In diesem Fall kann der Treap natürlich auch nicht tiefer als n sein.
Mit dem Satz von der bedingten Erwartung gilt: Der gesuchte Erwartungswert $E(h)$ für die Höhe eines Treaps ist die Summe aus dem Erwartungswert E_1, wenn alle Prioritäten verschieden sind, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit $1 - P$ für diesen Fall, und dem Erwartungswert E_2, falls es gleiche Prioritäten gibt, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit P, daß dies passiert:

$$E(h) = E_1(1 - P) + E_2 P \leq O(\log n) \cdot 1 + n \cdot 1/n = O(\log n).$$