RWTH Aachen | **WS 2012/13**
Lehrgebiet Theoretische Informatik | Übungsblatt 10
Reidl–Ries–Rossmanith–Sanchez–Tönnis | 17.12.2012

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

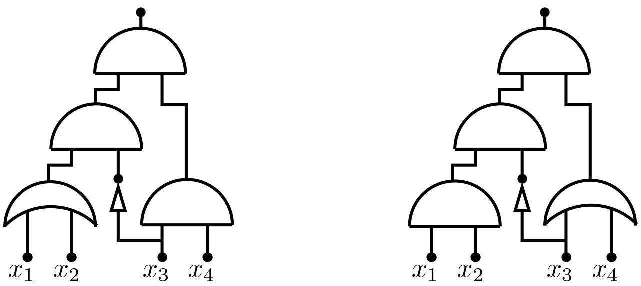
Aufgabe T21

Sie wollen zur Festzeit ihr Haus mit bunten Lampen dekorieren. Leider haben Sie ihren guten Freund, einen Elektrotechnikstudenten, um Hilfe gebeten und nun ist die Beleuchtung derart kompliziert, daß Sie Schwierigkeiten haben, sie überhaupt anzuschalten.

Ein Boolesches Schaltnetz besteht aus ein einem gerichteten, azyklischen Graphen mit Eingangsknoten $x_1, \ldots, x_n$ sowie einem Ausgangsknoten x_{out}. Die Eingangsknoten haben dabei nur eine ausgehende Kanten und der Ausgangsknoten nur eine eingehende Kante. Alle weiteren Knoten sind markiert als ODER-, UND- oder NICHT-Gatter, außerdem sind Verzweigungen möglich.

Für das Entscheidungsproblem Boolean Circuit ist ein solches Schaltnetz gegeben und die zugehörige Frage ist, ob es eine erfüllende Belegung gibt.

Die folgenden Schaltungen hat ihr Freund in die Beleuchtung verbaut, mit der Behauptung, daß die jeweilige Lichterkette angeht, wenn man die Schalter $x_1, \ldots, x_4$ in die richtige Stellung bringt. Ist dies tatsächlich für beide Schaltungen möglich? Wenn ja, geben Sie eine Schalterstellung an, die ihr Haus festlich beleuchtet.



Aufgabe T22

Reduzieren Sie das oben beschrieben Problem Boolean Circuit das SAT-Problem aus der Vorlesung. Formal: Zeigen Sie Boolean Circuit $\leq_p$ SAT. Denken Sie dabei an Zimt, Tannengeruch und Kerzenschein.

Aufgabe T23

Das Problem Planar Boolean Circuit ist definiert wie das Boolean Circuit, jedoch dürfen sich nun keine zwei Drähte kreuzen. Zeigen Sie:

$$\text{Boolean Circuit} \leq_p \text{Planar Boolean Circuit}$$

Denken Sie dabei darüber nach, ob Sie nicht doch noch Geschenke besorgen müssen: wenn Sie dieses Blatt lesen, ist die Zeit schon recht knapp!

Aufgabe H24 (10 Punkte)

Sie müssen die Beleuchtung ihres Hauses reparieren, aber aufgrund einer Knappheit an seltenen Erden sind NICHT-Gatter dieses Jahr ausgesprochen teuer. Sie planen daher, NICHT-Gatter durch schlaue Modifizierung der Schaltung zu ersetzen. Als Hilfsmittel haben sie zudem Schalter, die bereits ein NICHT-Gatter eingebaut haben.

Das Monotone Boolean Circuit ist wie Boolean Circuit definiert, aber es darf keine Negationsgatter außer direkt an den Eingängen geben.

Beweisen Sie, daß es eine Möglichkeit gibt, ihre Weihnachtsbeleuchtung ohne NICHT-Gatter zu realisieren, indem Sie zeigen, daß

$$\text{Boolean Circuit} \leq_p \text{Monotone Boolean Circuit}$$

Aufgabe H25 (10 Punkte)

Ihr E-Technikerfreund behauptet, er könne Schaltungen mit gleicher Funktion auf einen Blick erkennen. Das Problem Boolean Circuit Equivalence ist formal wie folgt definiert: als Eingabe erhalten wir zwei Boolesche Schaltkreise und müssen entscheiden, ob die beiden Schaltkreise für alle Eingaben die gleiche Ausgabe liefern.

Zeigen Sie, daß ihr Freund entweder ein Wunderkind oder ein Angeber ist, indem Sie beweisen, daß die folgenden zwei Aussagen gelten:

$$\overline{\text{Boolean Circuit Equivalence}} \leq_p \text{Boolean Circuit}$$
$$\text{Boolean Circuit} \leq_p \overline{\text{Boolean Circuit Equivalence}}$$

Aufgabe H26 (10 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat m Geschenke, die er an n liebe Kinder verteilen möchte. Jedes Kind kann dabei mehrere Geschenke bekommen, jedoch mag jedes Kind die unterschiedlichen Geschenke unterschiedlich gerne. Ein Kind i möge also ein Geschenk j genau $p_{i,j} \in \mathbb{N}$ gerne (diese hypothetischen Kinder haben äußerst präzise Wunschzettel).

Die Freude eines Kindes i sei dabei als $\mathcal{F}(i) = \sum_{j \in G_i} p_{i,j}$ definiert, wobei $G_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$ die Geschenke bezeichnet, die das Kind i erhält. Natürlich möchte der Weihnachtsmann allen Kinder eine möglichst glückliche Weihnachtszeit bescheren, daher versucht er die Geschenke so in Mengen $G_1, \ldots, G_n$ einzuteilen, daß die Freude des traurigsten Kindes maximal ist. Formal er will also die Funktion $c(\mathcal{G}) = \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}(i)$ maximieren, wobei $\mathcal{G}$ eine beliebige Partition der m Geschenke bezeichne.

Bei der Entscheidungsvariante des Santa Claus Problem soll entschieden werden, ob eine gegebene Mindestweihnachtsfreude k erreicht werden kann, also, ob es eine Lösung $\mathcal{G}$ gibt, für die die Zielfunktion $c(\mathcal{G}) \geq k$ übersteigt.

Zeigen Sie, daß das Santa Claus Problem NP-vollständig ist.

Hinweis: Für die Reduktion empfehlen wir das NP-vollständige Problem Partition, das wie folgt definiert ist:

Gegeben ist eine endliche Menge natürlicher Zahlen $A = \{ a_1, ..., a_n \} \subset \mathbb{N}$. Kann A so in disjunkte Teilmengen B, C zerlegt werden, daß die Summe der Elemente in beiden Teilmengen gleich groß ist?