RWTH Aachen
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Reidl–Ries–Rossmanith–Sanchez–Tönnis

WS 2012/13
Übungsblatt 10
17.12.2012

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

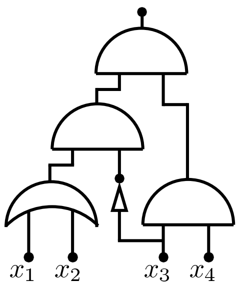
Aufgabe T21

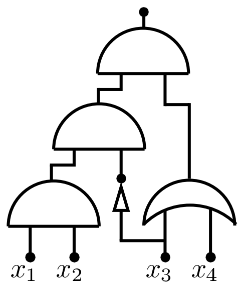
Sie wollen zur Festzeit ihr Haus mit bunten Lampen dekorieren. Leider haben Sie ihren guten Freund, einen Elektrotechnikstudenten, um Hilfe gebeten und nun ist die Beleuchtung derart kompliziert, daß Sie Schwierigkeiten haben, sie überhaupt anzuschalten.

Ein Boolesches Schaltnetz besteht aus ein einem gerichteten, azyklischen Graphen mit Eingangsknoten $x_1, \ldots, x_n$ sowie einem Ausgangsknoten x_{out}. Die Eingangsknoten haben dabei nur eine ausgehende Kanten und der Ausgangsknoten nur eine eingehende Kante. Alle weiteren Knoten sind markiert als ODER-, UND- oder NICHT-Gatter, außerdem sind Verzweigungen möglich.

Für das Entscheidungsproblem Boolean Circuit ist ein solches Schaltnetz gegeben und die zugehörige Frage ist, ob es eine erfüllende Belegung gibt.

Die folgenden Schaltungen hat ihr Freund in die Beleuchtung verbaut, mit der Behauptung, daß die jeweilige Lichterkette angeht, wenn man die Schalter $x_1, \ldots, x_4$ in die richtige Stellung bringt. Ist dies tatsächlich für beide Schaltungen möglich? Wenn ja, geben Sie eine Schalterstellung an, die ihr Haus festlich beleuchtet.





Lösungsvorschlag

Die erste Schaltung ist unerfüllbar. Die zweite Schaltung ist erfüllbar durch $x = 1101$.

Aufgabe T22

Reduzieren Sie das oben beschriebene Problem Boolean Circuit auf das SAT-Problem aus der Vorlesung. Formal: Zeigen Sie Boolean Circuit $\leq_p$ SAT. Denken Sie dabei an Zimt, Tannengeruch und Kerzenschein.

Lösungsvorschlag.
Wir werden jedes AND-Gatter und auch jedes OR-Gatter als eine Aussagenlogische Formel φ in CNF darstellen, daraus kann dann eine Formel Φ für die gesammte Schaltung erstellt werden. Zuerst betrachten wir ein AND-Gatter. Seien $x_1 \dots x_n$ die Eingänge des Gatters und S der Ausgang. S ist genau dann erfüllt, wenn alle x_i erfüllt sind, sprich ϕ hat das Aussehen $\varphi = S \leftrightarrow x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. Lösen wir den Äquivalenzpfeil auf, erhalten wir $\varphi = (S \leftarrow x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \bigwedge (S \rightarrow x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$. Aus der Aussagenlogik wissen wir daß $A \rightarrow B := \neg A \vee B$ gilt. Wenden wir dies auf φ an, erhalten wir $\varphi = (\neg S \vee (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)) \bigwedge (S \vee \neg(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n))$. Wenden wir nun noch die DeMorgan'schen Gesetze an, erhalten wir $\varphi = (\neg S \vee x_1) \wedge \cdots \wedge (\neg S \vee x_n) \bigwedge (\neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_n \vee S)$. Analog kann für ein OR-Gatter verfahren werden. Die einzelnen Formeln φ werden nun wie in der Schaltung "zusammengesteckt" zur Formel Φ.

Aufgabe T23
Das Problem Planar Boolean Circuit ist definiert wie das Boolean Circuit–Problem, jedoch dürfen sich nun keine zwei Drähte kreuzen. Zeigen Sie:

$$\textsc{Boolean Circuit} \leq_p \textsc{Planar Boolean Circuit}$$

Denken Sie dabei darüber nach, ob Sie nicht doch noch Geschenke besorgen müssen: wenn Sie dieses Blatt lesen, ist die Zeit schon recht knapp!

Aufgabe H24 (10 Punkte)
Sie müssen die Beleuchtung ihres Hauses reparieren, aber aufgrund einer Knappheit an seltenen Erden sind NICHT-Gatter dieses Jahr ausgesprochen teuer. Sie planen daher, NICHT-Gatter durch schlaue Modifizierung der Schaltung zu ersetzen. Als Hilfsmittel haben sie zudem Schalter, die bereits ein NICHT-Gatter eingebaut haben.
Das Monotone Boolean Circuit–Problem ist wie Boolean Circuit definiert, aber es darf keine Negationsgatter außer direkt an den Eingängen geben.
Beweisen Sie, daß es eine Möglichkeit gibt, ihre Weihnachtsbeleuchtung ohne NICHT-Gatter zu realisieren, indem Sie zeigen, daß

$$\textsc{Boolean Circuit} \leq_p \textsc{Monotone Boolean Circuit}$$

gilt.

Aufgabe H25 (10 Punkte)
Ihr E-Technikerfreund behauptet, er könne Schaltungen mit gleicher Funktion auf einen Blick erkennen. Das Problem Boolean Circuit Equivalence ist formal wie folgt definiert: als Eingabe erhalten wir zwei Boolesche Schaltkreise und müssen entscheiden, ob die beiden Schaltkreise für alle Eingaben die gleiche Ausgabe liefern.
Zeigen Sie, daß ihr Freund entweder ein Wunderkind oder ein Angeber ist, indem Sie beweisen, daß die folgenden zwei Aussagen gelten:

$$\overline{\textsc{Boolean Circuit Equivalence}} \leq_p \textsc{Boolean Circuit}$$
$$\textsc{Boolean Circuit} \leq_p \overline{\textsc{Boolean Circuit Equivalence}}$$

Lösungsvorschlag.

TODO: anpassen. $\overline{\text{Boolean Circuit Equivalence}} \leq_p$ Boolean Circuit

Zwei Schaltnetze A und B sind equivalent genau dann wenn es keine Belegung der Variablen gibt, sodass sie sich im Akzeptanzverhalten unterscheiden. Hierzu kann einfach eine neue Schaltung aus den beiden gegebenen Schaltnetzen konstruiert werden. $A \oplus B$ (A XOR B) ist genau dann wahr, wenn sich A und B in ihrem Akzeptanzverhalten unterscheiden. Damit Ja-Instanzen von Boolean Circuit Equivalence auch auf Ja-Instanzen von Boolean Circuit abgebildet werden, muss das Ergebnis noch negiert werden. Das heißt A und B sind equivalent genau dann wenn $\overline{A \oplus B}$ erfüllbar ist.

Boolean Circuit $\leq_p \overline{\text{Boolean Circuit Equivalence}}$

Konstruire einen unerfüllbaren Schaltkreis U, für die gleiche Anzahl an Variablen wie der in Boolean Circuit gegebene Schaltkreis A. Nun ist (A, E) äquivalent genau dann wenn A nicht erfüllbar ist.

Aufgabe H26 (10 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat m Geschenke, die er an n liebe Kinder verteilen möchte. Jedes Kind kann dabei mehrere Geschenke bekommen, jedoch mag jedes Kind die unterschiedlichen Geschenke unterschiedlich gerne. Ein Kind i möge also ein Geschenk j genau $p_{i,j} \in \mathbb{N}$ gerne (diese hypothetischen Kinder haben äußerst präzise Wunschzettel).

Die Freude eines Kindes i sei dabei als $\mathcal{F}(i) = \sum_{j \in G_i} p_{i,j}$ definiert, wobei $G_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$ die Geschenke bezeichnet, die das Kind i erhält. Natürlich möchte der Weihnachtsmann allen Kinder eine möglichst glückliche Weihnachtszeit bescheren, daher versucht er die Geschenke so in Mengen $G_1, \ldots, G_n$ einzuteilen, daß die Freude des traurigsten Kindes maximal ist. Formal will er also die Funktion $c(\mathcal{G}) = \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}(i)$ maximieren, wobei $\mathcal{G}$ eine beliebige Partition der m Geschenke bezeichne.

Bei der Entscheidungsvariante des Santa Claus Problems soll entschieden werden, ob eine gegebene Mindestweihnachtsfreude k erreicht werden kann, also, ob es eine Lösung $\mathcal{G}$ gibt, für die $c(\mathcal{G}) \geq k$ gilt.

Zeigen Sie, daß das Santa Claus Problem NP-vollständig ist.

Hinweis: Für die Reduktion empfehlen wir das NP-vollständige Problem Partition, das wie folgt definiert ist:

Gegeben ist eine endliche Menge natürlicher Zahlen $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$. Kann A so in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden, daß die Summe der Elemente in beiden Teilmengen gleich groß ist?

Lösungsvorschlag.

Santa Claus Problem $\in$ NP kann leicht gezeigt werden indem als Zertifikat eine Verteilung der Geschenke auf die Kinder angegeben wird. Werden die Mengen die jedes Kind bekommt im Zertifikat durch ein Trennsymbol getrennt hintereinander aufgeschrieben, dann wird $O(n + m \cdot \log m)$ Platz benötigt.

(z.B.: die Form $z =$ Geschenke für Kind 1#Geschenke für Kind 1#... braucht n Rauten und für jedes der m Geschenke eine $(\log m)$-stellige Binärzahl)

Man kann leicht eine Instanz von Partition in eine Instanz des Santa Claus Problem umwandeln indem man $n = 2$, $p_{1,j} = p_{2,j} = a_j$ und $k = \frac{1}{2} \sum_j a_j$ setzt. Die so konstruierte

Santa Claus Instanz kann genau dann gelöst werden, wenn die Partition Instanz lösbar ist.