RWTH Aachen **WS 2012/13**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 6
Reidl–Ries–Rossmanith–Sanchez–Tönnis 19.11.2012

Übung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe T12

Sind die folgenden Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems lösbar? Finden Sie eine Lösung oder zeigen Sie die Unlösbarkeit!

a) $\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\0\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0100\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0000\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\01\end{bmatrix}$

Lösungsvorschlag.

a: Oben länger oder gleich wie unten, bei Anfangskarte länger.

b: Lösung 3, 1, 1, 4.

c: Erste und letzte Karte müssen gleich oft vorkommen, dann sind durch diese Karten aber schon mehr Nullen unten als Einsen. Das kann man durch die mittlere Karte nur noch schlimmer machen.

Aufgabe T13

Wenn das Postsche Korrespondenzproblem so modifiziert wird, daß nur ein unäres Alphabet verwendet wird, ist es dann immer noch unentscheidbar?

Lösungsvorschlag.

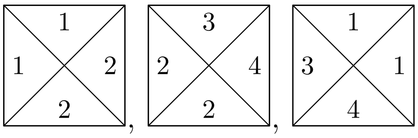
Nein, es wird entscheidbar. Es hat nämlich genau dann eine Lösung, wenn es sowohl eine Karte (u_i, v_i) mit $|u_i| \geq |v_i|$ gibt, als auch eine Karte (u_j, v_j) mit $|u_j| \leq |v_j$. Dann kann man nämlich einfach $|u_i| - |v_i|$ mal die $j$te Karte nehmen und einfach $|v_j| - |u_j|$ mal die $i$te Karte.

Andererseits gibt es sonst sicher keine Lösung, da obere Wörter ja immer länger als untere Wörter sind (oder umgekehrt).

Aufgabe T14

In dieser Aufgabe betrachten wir das folgende Puzzleproblem: Gegeben ist eine Menge von quadratischen Steinen, deren vier Kanten jeweils mit natürlichen Zahlen dekoriert sind. Gesucht ist eine Strategie, eine unendliche Ebene vollständig mit Kopien dieser Steine zu bedecken, wobei aneinanderliegende Kanten stets dieselben Zahlen tragen sollen (es handelt sich gewissermaßen um die unendliche Version des Spiels Tetravex, welches aber, historisch gesehen, selbst als endliche Version unseres Problems entstand).

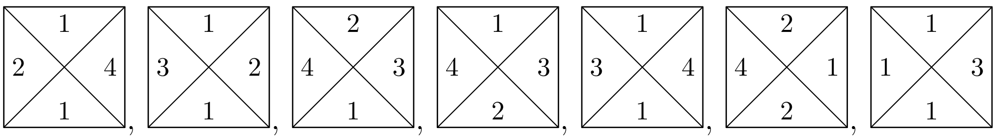
1. Ist diese Instanz lösbar?



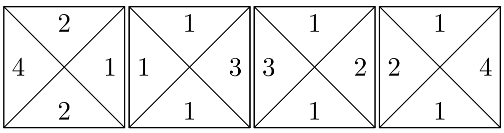
Lösungsvorschlag. Nein: Da oben stets ungerade und unten stets gerade Zahlen auf den Steinen stehen, lassen sich keine zwei Steine übereinanderlegen, also erst recht nicht unendlich viele.

Wer mehr über dieses Problem wissen will, möge im Buch *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms* von Donald Knuth den Abschnitt 2.3.4.3 lesen.

2. Ist diese Instanz lösbar?



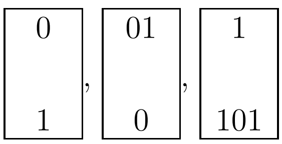
Lösungsvorschlag. Ja: das folgende Rechteck kann unendlich oft aneinandergelegt werden.



Aufgabe H13 (16 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, das eine Instanz des Postschen Korrespondenzproblems über dem Alphabet $\{0,1\}^*$ einlesen kann und anschließend zu lösen versucht. Wir empfehlen, Backtracking mit einem Abbruch bei einer vorgegebenen Suchtiefe zu verwenden. Das Programm soll entweder eine gefundene Lösung ausgeben, sagen, daß es keine Lösung gibt, oder zugeben, daß es unfähig war diese Instanz zu lösen.

Geben Sie einen Ausdruck Ihres Programms ab und Protokolle über die Arbeit Ihres Programms auf den Instanzen aus Aufgabe T12 und den folgenden:

a) 

b) $\begin{array}{|c|}\hline 01 \\ 000 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ 111 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ 010 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 001 \\ 01 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 010 \\ 11 \\ \hline\end{array}$

Bedenken Sie, daß die Tutoren in der Lage sein müssen, Ihr Programm nachzuvollziehen.

Lösungsvorschlag. Bei der oberen gibt es eine Lösung der Länge 44 (nämlich 2 1 2 2 1 2 1 2 2 1 2 2 3 2 2 3 3 2 1 1 3 2 2 1 2 3 2 2 1 1 2 3 2 2 2 1 3 2 3 2 3 3 1 3), bei der zweiten gar keine.

Lassen Sie Ihr Programm *nicht* auf diesen Instanzen laufen:

c) $\begin{array}{|c|}\hline 1101 \\ 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0110 \\ 11 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 110 \\ \hline\end{array}$

d) $\begin{array}{|c|}\hline 10 \\ 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ 001 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 100 \\ 1 \\ \hline\end{array}$

e) $\begin{array}{|c|}\hline 101 \\ 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 101 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ 1 \\ \hline\end{array}$

Aufgabe H14 (6 Punkte)

Ist folgende Variante des Postschen Korrespondenzproblems entscheidbar? Wir verlangen, daß das Alphabet $\{0,1\}^*$ ist und jedes Wort auf jeder Karte höchstens die Länge 17 besitzt.

Lösungsvorschlag.

Da wir doppelt vorkommende Karten aus einer PKP-Instanz entfernen können gibt es nur endlich viele Instanzen, welche die obige Bedingung erfüllen: es gibt nur 2^{34} verschiende Karten und daher höchstens $2^{2^{34}}$ Instanzen.

Damit ist diese Variante des PKP entscheidbar, denn die Sprache ist endlich. Dies erscheint zunächst kontraintuitiv, man bedenke aber, dass Entscheidbarkeit lediglich die *Existenz* einer TM vorraussetzt, welche die Sprache entscheidet, nicht die *Konstruierbarkeit* dieser TM.

Betrachten wir einfach alle TMs, die als Eingabe die obigen PKP-Instanzen bekommen, und für jede gültige Eingabe eine 0 oder 1 ausgeben (und ansonsten etwas anderes), so entscheidet eine dieser Maschinen die obige Sprache. Dazu muss diese Maschine noch nicht einmal die obigen Instanzen lösen, stattdessen könnte die (richtige) Antwort schlicht in den Zuständen der TM kodiert sein.

Aufgabe H15 (Bonusaufgabe, sehr viele Punkte)

Ist das Puzzleproblem aus Aufgabe T14 entscheidbar?

Hinweis: Diese Aufgabe ist sehr schwierig.