NP-Vollständigkeit ausgewählter Graphprobleme

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität
RWTH Aachen

Dezember 2011

Wie erinnern uns an das Cliquenproblem.

Problem (CLIQUE)

Eingabe: *Graph* $G = (V, E)$, $k \in \{1, \ldots, |V|\}$
Frage: *Gibt es eine* k*-Clique?*

Wie erinnern uns an das Cliquenproblem.

Problem (CLIQUE)

Eingabe: *Graph* $G = (V, E)$, $k \in \{1, \ldots, |V|\}$
Frage: *Gibt es eine* k*-Clique?*

Satz

CLIQUE ist NP*-vollständig.*

Da wir schon wissen, dass das Cliquenproblem in NP ist, müssen wir zum Nachweis der NP-Vollständigkeit nur noch die NP-Härte nachweisen.

Dazu zeigen wir SAT $\leq_p$ CLIQUE.

Wir beschreiben eine polynomiell berechenbare Funktion f, die eine KNF-Formel ϕ in einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ transformiert, so dass gilt:

$$\phi \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ hat eine } k\text{-Clique} \quad .$$

Beschreibung der Funktion f:

- Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln von ϕ.
- Sei k_i die Anzahl Literale in Klausel C_i.
- Seien $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,k_i}$ die Literale in Klausel C_i.

Beschreibung der Funktion f:

- Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln von ϕ.
- Sei k_i die Anzahl Literale in Klausel C_i.
- Seien $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,k_i}$ die Literale in Klausel C_i.
- Identifiziere Literale und Knoten, d.h. setze

$$V \;=\; \{\ell_{i,j} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le k_i\} \;.$$

Beschreibung der Funktion f:

- Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln von ϕ.
- Sei k_i die Anzahl Literale in Klausel C_i.
- Seien $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,k_i}$ die Literale in Klausel C_i.
- Identifiziere Literale und Knoten, d.h. setze

$$V = \{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i\} .$$

- Jedes Knotenpaar wird durch eine Kante verbunden, mit folgenden *Ausnahmen*:
  1) die assoziierten Literale gehören zur selben Klausel oder
  2) eines der beiden Literale ist die Negierung des anderen Literals.

Beschreibung der Funktion f:

- Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln von ϕ.
- Sei k_i die Anzahl Literale in Klausel C_i.
- Seien $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,k_i}$ die Literale in Klausel C_i.
- Identifiziere Literale und Knoten, d.h. setze

$$V = \{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i\} .$$

- Jedes Knotenpaar wird durch eine Kante verbunden, mit folgenden *Ausnahmen*:
  1) die assoziierten Literale gehören zur selben Klausel oder
  2) eines der beiden Literale ist die Negierung des anderen Literals.
- Setze $k = m$.

Beispiel: $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3)$

Erfüllende Belegung: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat m-Clique

Betrachte eine beliebige erfüllende Belegung. Pro Klausel wähle ein erfülltes Literale beliebig aus. Sei U die Menge dieser Literale. Wir behaupten, U ist eine m-Clique.

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat m-Clique

Betrachte eine beliebige erfüllende Belegung. Pro Klausel wähle ein erfülltes Literale beliebig aus. Sei U die Menge dieser Literale. Wir behaupten, U ist eine m-Clique.

Begründung: Per Definition ist $|U| = m$. Seien ℓ und ℓ' zwei unterschiedliche Literale aus U. Wir müssen zeigen, dass ℓ und ℓ' durch eine Kante verbunden sind:

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat m-Clique

Betrachte eine beliebige erfüllende Belegung. Pro Klausel wähle ein erfülltes Literale beliebig aus. Sei U die Menge dieser Literale. Wir behaupten, U ist eine m-Clique.

Begründung: Per Definition ist $|U| = m$. Seien ℓ und ℓ' zwei unterschiedliche Literale aus U. Wir müssen zeigen, dass ℓ und ℓ' durch eine Kante verbunden sind:

- Ausnahme 1 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie aus verschiedenen Klauseln sind.

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat m-Clique

Betrachte eine beliebige erfüllende Belegung. Pro Klausel wähle ein erfülltes Literale beliebig aus. Sei U die Menge dieser Literale. Wir behaupten, U ist eine m-Clique.

Begründung: Per Definition ist $|U| = m$. Seien ℓ und ℓ' zwei unterschiedliche Literale aus U. Wir müssen zeigen, dass ℓ und ℓ' durch eine Kante verbunden sind:

- Ausnahme 1 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie aus verschiedenen Klauseln sind.
- Ausnahme 2 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie gleichzeitig erfüllt sind.

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat m-Clique

Betrachte eine beliebige erfüllende Belegung. Pro Klausel wähle ein erfülltes Literale beliebig aus. Sei U die Menge dieser Literale. Wir behaupten, U ist eine m-Clique.

Begründung: Per Definition ist $|U| = m$. Seien ℓ und ℓ' zwei unterschiedliche Literale aus U. Wir müssen zeigen, dass ℓ und ℓ' durch eine Kante verbunden sind:

- Ausnahme 1 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie aus verschiedenen Klauseln sind.
- Ausnahme 2 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie gleichzeitig erfüllt sind.

Also gibt es eine Kante zwischen ℓ und ℓ'.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Sei U eine m-Clique in G.
- Aufgrund von Ausnahmeregel 1 gehören die Literale in U zu verschiedenen Klauseln.

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Sei U eine m-Clique in G.
- Aufgrund von Ausnahmeregel 1 gehören die Literale in U zu verschiedenen Klauseln.
- U enthält somit genau ein Literal pro Klausel in ϕ.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Sei U eine m-Clique in G.
- Aufgrund von Ausnahmeregel 1 gehören die Literale in U zu verschiedenen Klauseln.
- U enthält somit genau ein Literal pro Klausel in ϕ.
- Diese Literale können alle gleichzeitig erfüllt werden, da sie sich wegen Ausnahmeregel 2 nicht widesprechen.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Sei U eine m-Clique in G.
- Aufgrund von Ausnahmeregel 1 gehören die Literale in U zu verschiedenen Klauseln.
- U enthält somit genau ein Literal pro Klausel in ϕ.
- Diese Literale können alle gleichzeitig erfüllt werden, da sie sich wegen Ausnahmeregel 2 nicht widesprechen.
- Also ist ϕ erfüllbar.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Sei U eine m-Clique in G.
- Aufgrund von Ausnahmeregel 1 gehören die Literale in U zu verschiedenen Klauseln.
- U enthält somit genau ein Literal pro Klausel in ϕ.
- Diese Literale können alle gleichzeitig erfüllt werden, da sie sich wegen Ausnahmeregel 2 nicht widesprechen.
- Also ist ϕ erfüllbar.

Die Laufzeit von f ist offensichtlich polynomiell beschränkt. $\square$

Hamiltonkreisprobleme

Problem (Hamiltonkreis – Hamiltonian Circuit – HC)

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in G?

Hamiltonkreisprobleme

Problem (Hamiltonkreis – Hamiltonian Circuit – HC)

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in G?

Problem (Gerichteter Hamiltonkreis – Directed HC – DHC)

Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in G?

HC $\leq_p$ DHC

Lemma

$HC \leq_p DHC$.

Lemma

HC $\leq_p$ DHC.

Beweis:

Reduktion: Für HC liege ein ungerichteter Graph G vor. Wir transformieren G in einen gerichteten Graphen G', indem wir jede ungerichtete Kante durch zwei entgegengesetzte gerichtete Kanten ersetzen. Diese lokale Ersetzung ist offensichtlich in polynomieller Zeit möglich.

Korrektheit:

Lemma

HC $\leq_p$ DHC.

Beweis:

Reduktion: Für HC liege ein ungerichteter Graph G vor. Wir transformieren G in einen gerichteten Graphen G', indem wir jede ungerichtete Kante durch zwei entgegengesetzte gerichtete Kanten ersetzen. Diese lokale Ersetzung ist offensichtlich in polynomieller Zeit möglich.

Korrektheit: G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn auch G' einen Hamiltonkreis hat. $\square$

DHC $\leq_p$ HC

Lemma

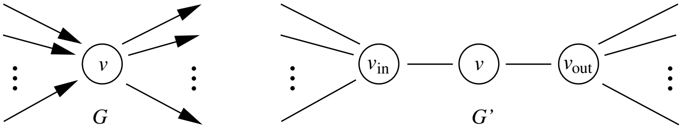
DHC $\leq_p$ HC.

Lemma

DHC $\leq_p$ HC.

Beweis:

Reduktion: Gegeben sei nun ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Aus G konstruieren wir wieder mittels lokaler Ersetzung einen ungerichteten Graphen G':

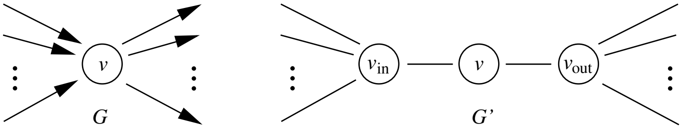


Lemma

DHC $\leq_p$ HC.

Beweis:

Reduktion: Gegeben sei nun ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Aus G konstruieren wir wieder mittels lokaler Ersetzung einen ungerichteten Graphen G':



Interpretation: v ist Zimmer, v_{in} und v_{out} sind Ein- bzw. Ausgangstüren.

DHC $\leq_p$ HC – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Wir müssen zeigen, G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn auch G' einen Hamiltonkreis hat.

Jede Rundreise in G kann offensichtlich in eine Rundreise in G' transformiert werden.

Aber wie sieht es mit der Umkehrrichtung aus?

DHC $\leq_p$ HC – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:
Wir müssen zeigen, G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn auch G' einen Hamiltonkreis hat.

Jede Rundreise in G kann offensichtlich in eine Rundreise in G' transformiert werden.

Aber wie sieht es mit der Umkehrrichtung aus?

- Eine Rundreise in G', die ein Zimmer durch die Eingangstür betritt, betritt alle Zimmer durch die Eingangstür.

Korrektheit:
Wir müssen zeigen, G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn auch G' einen Hamiltonkreis hat.

Jede Rundreise in G kann offensichtlich in eine Rundreise in G' transformiert werden.

Aber wie sieht es mit der Umkehrrichtung aus?

- Eine Rundreise in G', die ein Zimmer durch die Eingangstür betritt, betritt alle Zimmer durch die Eingangstür.
- Eine Rundreise in G', die ein Zimmer durch die Ausgangstür betritt, betritt alle Zimmer durch die Ausgangstür. Aber diese Rundreise können wir rückwärts ablaufen.

Also kann auch jeder Hamiltonkreis in G' in einen Hamiltonkreis in G transformiert werden. $\square$

NP-Vollständigkeit von HC und DHC

Satz

HC und DHC sind NP*-vollständig.*

Satz

HC und DHC sind NP*-vollständig.*

Beweis:

Beide Probleme sind offensichtlich in NP, da man die Kodierung eines Hamiltonkreises in polynomieller Zeit auf ihre Korrektheit überprüfen kann.

Da HC und DHC beidseitig aufeinander polynomiell reduzierbar sind, genügt es die NP-Härte eines der beiden Probleme nachzuweisen.

Wir zeigen die NP-Härte von DHC, durch eine polynomielle Reduktion von SAT.

Reduktion:

Wir präsentieren eine polynomiell berechenbare Funktion f die eine KNF-Formel ϕ mit Variablen

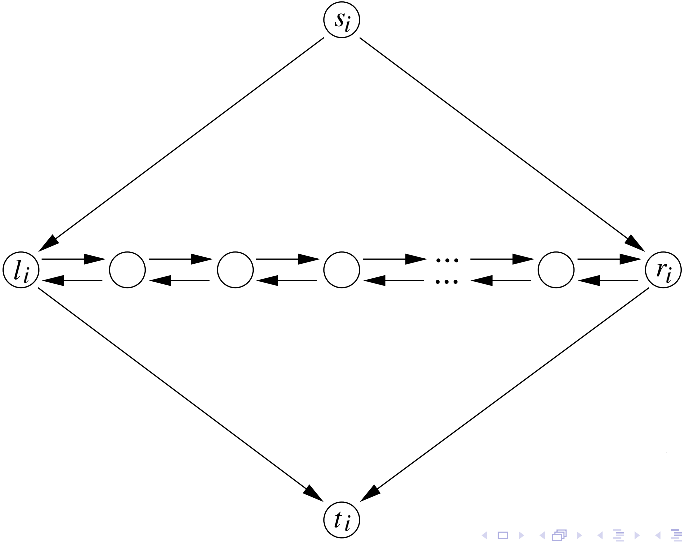
$$x_1, \ldots, x_N$$

und Klauseln

$$c_1, \ldots, c_M$$

in einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn ϕ erfüllbar ist.

Für jede Variable x_i enthalte der Graph G die folgende Struktur G_i.



NP-Vollständigkeit von HC und DHC – Fortsetzung Beweis

Diese N Gadgets werden miteinander verbunden, indem wir die Knoten t_i und s_{i+1} $(1 \leq i \leq N-1)$ sowie t_N und s_1 miteinander identifizieren. (Bild Tafel)

Diese N Gadgets werden miteinander verbunden, indem wir die Knoten t_i und s_{i+1} $(1 \leq i \leq N-1)$ sowie t_N und s_1 miteinander identifizieren. (Bild Tafel)

In dem so entstehenden Graphen besucht jede Rundreise, die beim Knoten s_1 startet, die Gadgets in der Reihenfolge $G_1, G_2, \ldots, G_N$.

Diese N Gadgets werden miteinander verbunden, indem wir die Knoten t_i und s_{i+1} $(1 \leq i \leq N-1)$ sowie t_N und s_1 miteinander identifizieren. (Bild Tafel)

In dem so entstehenden Graphen besucht jede Rundreise, die beim Knoten s_1 startet, die Gadgets in der Reihenfolge $G_1, G_2, \ldots, G_N$.

Die Rundreise hat dabei für jedes Gadget G_i die Freiheit das Gadget *von links nach rechts*, also von l_i nach r_i, oder *von rechts nach links*, also von r_i nach l_i, zu durchlaufen.

Diese N Gadgets werden miteinander verbunden, indem wir die Knoten t_i und s_{i+1} $(1 \leq i \leq N-1)$ sowie t_N und s_1 miteinander identifizieren. (Bild Tafel)

In dem so entstehenden Graphen besucht jede Rundreise, die beim Knoten s_1 startet, die Gadgets in der Reihenfolge $G_1, G_2, \ldots, G_N$.

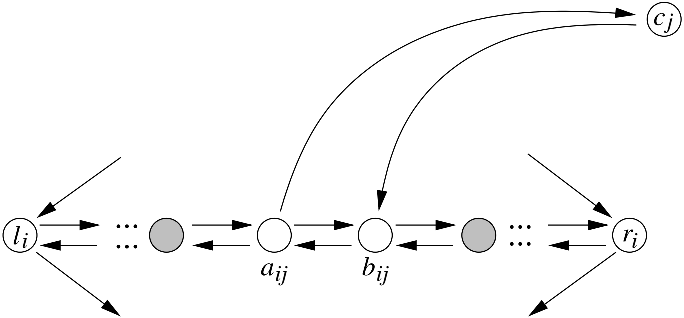
Die Rundreise hat dabei für jedes Gadget G_i die Freiheit das Gadget *von links nach rechts*, also von l_i nach r_i, oder *von rechts nach links*, also von r_i nach l_i, zu durchlaufen.

Die erste Variante interpretieren wir als Variablenbelegung $x_i = 1$, die zweite als Variablenbelegung $x_i = 0$.

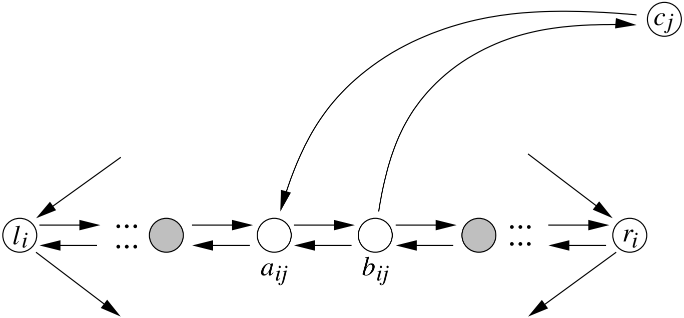
Jetzt fügen wir einen weiteren Knoten für jede Klausel c_j ein.

Jetzt fügen wir einen weiteren Knoten für jede Klausel c_j ein.

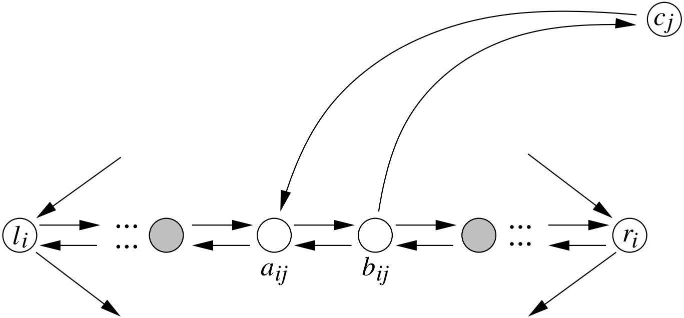
Falls das Literal x_i in Klausel c_j enthalten ist, so verbinden wir das Gadget G_i wie folgt mit dem Klauselknoten c_j:



Falls das Literal $\bar{x}_i$ in Klausel c_j enthalten ist, so verbinden wir das Gadget G_i wie folgt mit dem Klauselknoten c_j:



Falls das Literal $\bar{x}_i$ in Klausel c_j enthalten ist, so verbinden wir das Gadget G_i wie folgt mit dem Klauselknoten c_j:



Ist es nach Hinzunahme der Klauselknoten möglich, dass eine Rundreise zwischen den Gadgets hin- und herspringt statt sie in der vorgesehenen Reihenfolge zu besuchen? - Nein, weil ...

Korrektheit:

zu zeigen: G hat einen Hamiltonkreis $\Rightarrow \phi$ ist erfüllbar

NP-Vollständigkeit von HC und DHC – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

zu zeigen: G hat einen Hamiltonkreis $\Rightarrow \phi$ ist erfüllbar

- Wird ein Klauselknoten c_j aus einem Gadget G_i heraus von links nach rechts durchlaufen, so muss gemäß unserer Konstruktion, die Klausel c_j das Literal x_i enthalten.
- Also wird diese Klausel durch die mit der Laufrichtung von links nach rechts assoziierten Belegung $x_i = 1$ erfüllt.

Korrektheit:

zu zeigen: G hat einen Hamiltonkreis $\Rightarrow \phi$ ist erfüllbar

- Wird ein Klauselknoten c_j aus einem Gadget G_i heraus von links nach rechts durchlaufen, so muss gemäß unserer Konstruktion, die Klausel c_j das Literal x_i enthalten.
- Also wird diese Klausel durch die mit der Laufrichtung von links nach rechts assoziierten Belegung $x_i = 1$ erfüllt.
- Bei einer Laufrichtung von rechts nach links, die mit der Belegung $x_i = 0$ assoziiert ist, wird die Klausel ebenso erfüllt, weil sie in diesem Fall das Literal $\bar{x}_i$ enthält.

Korrektheit:

zu zeigen: G hat einen Hamiltonkreis $\Rightarrow \phi$ ist erfüllbar

- Wird ein Klauselknoten c_j aus einem Gadget G_i heraus von links nach rechts durchlaufen, so muss gemäß unserer Konstruktion, die Klausel c_j das Literal x_i enthalten.
- Also wird diese Klausel durch die mit der Laufrichtung von links nach rechts assoziierten Belegung $x_i = 1$ erfüllt.
- Bei einer Laufrichtung von rechts nach links, die mit der Belegung $x_i = 0$ assoziiert ist, wird die Klausel ebenso erfüllt, weil sie in diesem Fall das Literal $\bar{x}_i$ enthält.

Also erfüllt die mit der Rundreise assoziierte Belegung alle Klauseln.

NP-Vollständigkeit von HC und DHC – Fortsetzung Beweis

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

- Eine Belegung beschreibt in welcher Richtung die Gadgets $G_1, \ldots, G_N$ jeweils durchlaufen werden.

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

- Eine Belegung beschreibt in welcher Richtung die Gadgets $G_1, \ldots, G_N$ jeweils durchlaufen werden.
- Klauselknoten c_j können wir in die Rundreise einbauen, indem wir eine der Variablen x_i auswählen, die c_j erfüllt, und c_j vom Gadget G_i aus besuchen.

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

- Eine Belegung beschreibt in welcher Richtung die Gadgets $G_1, \ldots, G_N$ jeweils durchlaufen werden.
- Klauselknoten c_j können wir in die Rundreise einbauen, indem wir eine der Variablen x_i auswählen, die c_j erfüllt, und c_j vom Gadget G_i aus besuchen.
- Sollte c_j für $x_i = 1$ erfüllt sein, so ist x_i unnegiert in c_j enthalten, und somit ist ein Besuch von c_j beim Durchlaufen des Gadgets G_i von links nach rechts möglich.

NP-Vollständigkeit von HC und DHC – Fortsetzung Beweis

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

- Eine Belegung beschreibt in welcher Richtung die Gadgets $G_1, \ldots, G_N$ jeweils durchlaufen werden.
- Klauselknoten c_j können wir in die Rundreise einbauen, indem wir eine der Variablen x_i auswählen, die c_j erfüllt, und c_j vom Gadget G_i aus besuchen.
- Sollte c_j für $x_i = 1$ erfüllt sein, so ist x_i unnegiert in c_j enthalten, und somit ist ein Besuch von c_j beim Durchlaufen des Gadgets G_i von links nach rechts möglich.
- Sollte c_j hingegen für $x_i = 0$ erfüllt sein, so ist die Variable negiert in der Klausel enthalten, und der Besuch von c_j kann beim Durchlaufen des Gadgets von rechts nach links erfolgen.

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

- Eine Belegung beschreibt in welcher Richtung die Gadgets $G_1, \ldots, G_N$ jeweils durchlaufen werden.
- Klauselknoten c_j können wir in die Rundreise einbauen, indem wir eine der Variablen x_i auswählen, die c_j erfüllt, und c_j vom Gadget G_i aus besuchen.
- Sollte c_j für $x_i = 1$ erfüllt sein, so ist x_i unnegiert in c_j enthalten, und somit ist ein Besuch von c_j beim Durchlaufen des Gadgets G_i von links nach rechts möglich.
- Sollte c_j hingegen für $x_i = 0$ erfüllt sein, so ist die Variable negiert in der Klausel enthalten, und der Besuch von c_j kann beim Durchlaufen des Gadgets von rechts nach links erfolgen.

Also können alle Klauselknoten in die Rundreise eingebunden werden. $\square$

NP-Vollständigkeit von TSP

Satz

TSP ist NP*-hart.*

Beweis: Wir zeigen, dass TSP sogar dann NP-hart ist, wenn nur die Kantengewichte 1 und 2 verwendet werden.

Satz

TSP ist NP*-hart.*

Beweis: Wir zeigen, dass TSP sogar dann NP-hart ist, wenn nur die Kantengewichte 1 und 2 verwendet werden.

Diese eingeschränkte Variante von TSP heißt $\{1,2\}$-TSP. Wir zeigen HC $\leq$ $\{1,2\}$-TSP-E.

Satz

TSP ist NP*-hart.*

Beweis: Wir zeigen, dass TSP sogar dann NP-hart ist, wenn nur die Kantengewichte 1 und 2 verwendet werden.

Diese eingeschränkte Variante von TSP heißt $\{1,2\}$-TSP. Wir zeigen HC $\leq \{1,2\}$-TSP-E.

Aus dem Graphen $G = (V, E)$ für HC erzeugen wir einen vollständigen Graphen $G' = (V, E')$ mit Kosten

$$c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ 2 & \text{falls } \{u, v\} \notin E \end{cases}$$

NP-Vollständigkeit von TSP

Satz

TSP ist NP*-hart.*

Beweis: Wir zeigen, dass TSP sogar dann NP-hart ist, wenn nur die Kantengewichte 1 und 2 verwendet werden.

Diese eingeschränkte Variante von TSP heißt $\{1,2\}$-TSP. Wir zeigen HC $\leq \{1,2\}$-TSP-E.

Aus dem Graphen $G = (V, E)$ für HC erzeugen wir einen vollständigen Graphen $G' = (V, E')$ mit Kosten

$$c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u,v\} \in E \\ 2 & \text{falls } \{u,v\} \notin E \end{cases}$$

G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn G' eine TSP-Tour der Länge höchstens n hat. $\square$