Wir betrachten das folgende Erfüllbarkeitsproblem:

PARTITION INTO FORESTS	
Eingabe:	Ein Graph G, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Problem:	Können die Knoten von G in k Mengen $V_1, \ldots, V_k$ partitioniert werden, so dass jeweils $G[V_i]$ für $1 \leq i \leq k$ ein Wald ist?

Es ist schnell ersichtlich, dass dieses Problem in NP liegt: als Zertifikat dient schlicht die Partition—die obigen Eigenschaften können leicht in polynomieller Zeit überprüft werden. Um nun NP-Schwere (und somit NP-Vollständigkeit) zu zeigen, wollen wir das Problem COLORING auf PARTITION INTO FORESTS reduzieren, wir zeigen also, dass

$$\text{COLORING} \leq_p \text{PARTITION INTO FORESTS}$$

Dazu betrachte man folgende Formulierung von COLORING (die Überprüfung der Äquivalenz zu der schon bekannten Formulierung sei dem Leser überlassen)

COLORING	
Eingabe:	Ein Graph G, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Problem:	Können die Knoten von G in k Mengen $V_1, \ldots, V_k$ partitioniert werden, so dass jeweils V_i in G für $1 \leq i \leq k$ eine unabhängige Menge ist?

So Ausgedrückt weisen die beiden Probleme bereits ein gewissen Ähnlichkeit auf. Die Reduktion ist entsprechend einfach: aus einer Instanz (G, k), $G = (V, E)$ von COLORING konstruieren wir eine Instanz (G', k) von PARTITION INTO FORESTS wie folgt. Der Graph $G' = (V', E')$ besteht dabei aus

$$V' = V \cup \{v_1, \ldots, v_l\}$$
$$E' = E \cup \{v_i u \mid 1 \leq i \leq k, u \in V\} \cup \{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq k\}$$

d.h. wir fügen k neue Knoten zu G hinzu und verbinden sie mit allen Knoten das alten Graphen, außerdem verbinden wir diesen Knoten alle untereinander.

Die Konstruktion dieses Graphen ist offensichtlich in polynomieller Zeit möglich. Beweisen wir nun, dass diese Reduktion korrekt ist.

"⇒" Sei $(G, k) \in$ Coloring, es existiert also eine k-Färbung der Knoten mit Farbmengen $V_1, \ldots, V_k$. Die Knoten des Graphen G', den wir aus unserer Reduktion erhalten, können dann in die Mengen $V_i' = V_i \cup \{v_i\}$, $1 \leq i \leq k$ partitioniert werden. Da $G'[V_i]$ keine Kanten enthält (es gilt $G[V_i] = G'[V_i]$) und v_i mit allen Knoten V in G' verbunden ist, folgern wir, dass $G'[V_i']$ ein Stern und damit insbesondere ein Wald ist. Somit sind die Mengen $V_1', \ldots, V_k'$ eine Partition in Wälder in G' und es folgt $(G', k) \in$ Partition Into Forests. $\square$

"⇐" Sei nun $(G', k) \in$ Partition Into Forests. Es existiert also eine Partitionierung von V' in Mengen $V_1', \ldots, V_k'$, so dass jedes V_i', $1 \leq i \leq k$ in G' einen Wald induziert. Zunächst stellen wir fest, dass unsere Partition einfach in eine Färbung von G überführt werden kann, wenn sie folgende Form hat: $V_i' \cap \{v_1, \ldots, v_k\} = v_i$, d.h. die i-te Menge enthält von allen Extraknoten nur den Knoten v_i. Ist dies der Fall, so muss $V_i' \setminus \{v_i\}$ in G' und damit in G unabhängig sein, denn v_i ist mit allen Knoten aus V verbunden. Es bleibt zu zeigen, dass wir aus jeder Lösung die *nicht* diese Form hat eine äquivalente Lösung (d.h. mit $\leq k$ Mengen) dieser Form konstruieren können. Die erste wichtige Beobachtung ist, dass $|V_i' \cap \{v_1, \ldots, v_k\}| \leq 2$ ist, wobei der Fall $|V_i' \cap \{v_1, \ldots, v_k\}| = 2$ nur dann eintritt, wenn $V_i' \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$ ist—jeder weitere Knoten, den wir zu einer solchen Menge hinzufügen wollten, würde unweigerlich ein Dreieck mit diesen zwei Knoten bilden.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass eine Menge V_i' mit $V_i' \cap \{v_1, \ldots, v_k\} = \emptyset$ existiert. Da es nur k Mengen $V_1', \ldots, V_k'$, und die Knoten $\{v_1, \ldots, v_k\}$ alle in irgendeiner dieser Mengen vorkommen müssen, existiert mindestens eine Menge V_j', $i \neq j$ mit $|V_j' \cap \{v_1, \ldots, v_k\}| = 2$ (die Menge V_i' enthält ja gerade keinen dieser Knoten, daher muss eine der andere Mengen für diesen Mangel aufkommen). Dieses Argument funktioniert ebenso in die andere Richtung: die Existenz einer Menge mit zwei Knoten aus $\{v_1, \ldots, v_k\}$ erzwingt die Existenz einer anderen Menge, die keinen solchen Knoten enthält.

Sei $V_j' = \{v_a, v_b\}$ mit $1 \leq a < b \leq k$. Wir konstruieren zwei neue Mengen V_i'', V_j'' wie folgt: da $G'[V_i']$ einen Wald induziert, ist dieser Teilgraph zweifärbbar. Wir nehmen eine beliebige Zweifärbung $A \cup B = V_i''$ und setzen

$$V_i'' = A \cup \{v_a\}$$
$$V_j'' = B \cup \{v_b\}$$

Da A, B in G' unabhängig sind, müssen V_i'', V_j'' wiederum Sterne und damit Wälder sein. Wir wiederholen diesen Prozess, bis keine Menge in $V_1', \ldots, V_k'$ (der Einfachheit halber benennen wir die Mengen nach einer solchen Iteration um) mehr vorhanden ist, die weniger oder mehr als einen Knoten aus $\{v_1, \ldots, v_k\}$ enthält. Damit sind wir fast am Ziel: es fehlt noch, dass $V_i \cap \{v_1, \dots, v_k\} = v_i$ ist—da die Knoten $v_1, \dots, v_k$ äquivalent sind und jede Menge V_i genau einen dieser Knoten enthält, können wir dies durch einfaches Austauschen erreichen. $\square$