Mehrband-Turingmaschinen und die universelle Turingmaschine

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität
RWTH Aachen

Oktober 2011

Turingmaschinen mit mehreren Bändern

k-Band TM

Eine k-Band-TM ist eine Verallgemeinerung der Turingmaschine und verfügt über k Arbeitsbänder mit jeweils einen unabhängigen Kopf. Die Zustandsübergangfunktion ist entsprechend von der Form

$$\delta : (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k \quad .$$

Band 1 fungiert als Ein-/Ausgabeband wie bei der (1-Band) TM. Die Bänder $2, \ldots, k$ sind initial mit B^* beschrieben.

Simulation k-Band TM durch 1-Band TM

Satz:

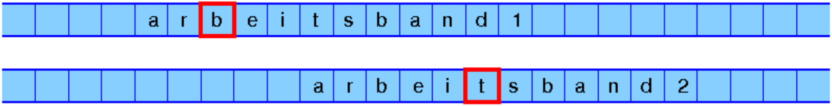
Eine k-Band TM M, die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt, kann von einer (1-Band) TM M' mit Zeitbedarf $O(t^2(n))$ und Platzbedarf $O(s(n))$ simuliert werden.

Beweis: Die TM M' verwendet $2k$ Spuren. Nach Simulation des t-ten Schrittes für $0 \leq t \leq t(n)$ gilt

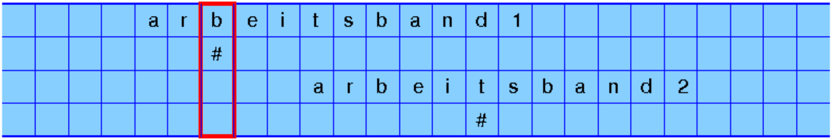
- Die ungeraden Spuren $1, 3, \ldots, 2k-1$ enthalten den Inhalt der Bänder $1, \ldots, k$ von M.
- Auf den geraden Spuren $2, 4, \ldots, 2k$ sind die Kopfposition auf diesen Bändern mit dem Zeichen $\#$ markiert.

Diese Initialisierung der Spuren ist in Zeit $O(1)$ möglich.

simulierte 2–Band–TM M



simulierende 4–spurige TM M' (zu Beginn eines Simulationsschrittes)



Simulation k-Band TM durch 1-Band-TM – Beweis

Jeder Rechenschritt von M wird durch M' wie folgt simuliert.

- Am Anfang stehe der Kopf von M' auf dem linkesten $\#$ und M' kenne den Zustand von M.
- Der Kopf von M' läuft nach rechts bis zum rechtesten $\#$, wobei die k Zeichen an den mit $\#$ markierten Spurpositionen im Zustand abgespeichert werden.
- Am rechtesten $\#$-Zeichen angekommen kann M' die Übergangsfunktion von M auswerten und kennt den neuen Zustand von M sowie die erforderlichen Übergänge auf den k Bändern.
- Nun läuft der Kopf von M' zurück, verändert dabei die Bandinschriften an den mit $\#$ markierten Stellen und verschiebt, falls erforderlich, auch die $\#$-Markierungen um eine Position nach links oder rechts.

Laufzeitanalyse:

Wieviele Bandpositionen können zwischen den linkesten und dem rechtesten # liegen?

Nach t Schritten können diese Markierungen höchstens $2t$ Positionen auseinanderliegen.

Also ist der Abstand zwischen diesen Zeichen und somit auch die Laufzeit zur Simulation eines Schrittes durch $O(t(n))$ beschränkt.

Insgesamt ergibt das zur Simulation von $t(n)$ Schritten eine Laufzeitschranke von $O(t(n)^2)$. $\square$

Special versus General Purpose Rechner

- Bisher haben wir für jedes Problem eine eigene TM entworfen, einen *special purpose* Rechner.
- Real existierende Maschinen sind jedoch programmierbare *general purpose* Rechner.
- Wir konstruieren jetzt eine programmierbare Variante der TM, die sogenannte *universelle TM*.

Ein-/Ausgabeverhalten der universellen TM

- Das Programm der universellen TM U ist die Kodierung einer beliebigen TM M.
- Diese Kodierung heißt die *Gödelnummer* von M und wird mit $\langle M \rangle$ bezeichnet.
- Als Eingabe erhält U einen String der Form $\langle M \rangle w$ bestehend aus der Gödelnummer $\langle M \rangle$ und einem beliebigen Wort w.
- Die universelle TM simuliert das Verhalten der TM M auf der Eingabe w.
- Bei inkorrekter Eingabe (d.h. die Eingabe beginnt nicht mit einer Gödelnummer) gibt U eine Fehlermeldung aus.

Definition

Mit *Gödelnummern* bezeichnet man die eindeutige prefixfreie Kodierung von TM über einem festen Alphabet.

- O.B.d.A. gehen wir von binären Kodierungen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ aus.
- *Prefixfrei* bedeutet, dass keine Gödelnummer Prefix (Anfangsteilwort) einer anderen Gödelnummer sein darf.
- Um Prefixfreiheit zu erreichen, vereinbaren wir, dass alle Gödelnummern mit 111 beginnen und auf 111 enden und ansonsten der Teilstring 111 nicht in der Kodierung vorkommt.

Realisierung von Gödelnummern

Zur prefixfreien Kodierung von TMen gibt es viele Möglichkeiten. Wir stellen jetzt eine mögliche Definition der Gödelnummern vor.

O.B.d.A. beschränken wir uns auf TM der folgenden Form:

- Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_t\}$.
- Der Anfangszustand sei q_1 und der Stoppzustand q_2.
- O.B.d.A. sei $\Gamma = \{0, 1, B\}$. Wir nummerieren das Alphabet durch indem wir $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ und $X_3 = B$ setzen.
- Auch die möglichen Kopfbewegungen nummerieren wir, indem wir $D_1 = L$, $D_2 = N$ und $D_3 = R$ setzen.

Zur Beschreibung von TM dieser Form müssen wir nur die Übergangsfunktion als Binärstring kodieren.

Kodierung der Übergangsfunktion:

- Der Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ wird kodiert durch den Binärstring
$$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^\ell 1 0^m \quad .$$

- Die Kodierung des $j$ten Übergangs bezeichnen wir mit $code(j)$.
- Die Gödelnummer einer TM M mit s vielen Übergängen ist dann
$$\langle M \rangle \;=\; 111\, code(1)\, 11\, code(2)\, 11 \ldots 11\, code(s)\, 111 \quad .$$

Als Eingabe erhält die universelle TM U ein Wort der Form $\langle M \rangle w$ für beliebiges $w \in \{0, 1\}^*$.

Wir implementieren U zunächst in Form einer 3-Band TM:

- Band 1 von U simuliert das Band der TM M.
- Band 2 von U enthält die Gödelnummer von M.
- Auf Band 3 speichert U den jeweils aktuellen Zustand von M.

Implementierung der universellen TM

Initialisierung:

- U überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.
- U kopiert die Gödelnummer auf Band 2 und schreibt die Binärkodierung des Anfangszustands auf Band 3.
- U bereitet Band 1 so vor, dass es nur das Wort w enthält. Der Kopf steht unter dem ersten Zeichen von w.

Laufzeit? – Die Laufzeit ist $O(1)$, wobei wir die Kodierungslänge von M als Konstante ansehen.

Implementierung der universellen TM

Simulation eines Schritts von M:

U sucht zu dem Zeichen an der Kopfposition aus Band 1 und dem Zustand auf Band 3 die Kodierung des entsprechenden Übergangs von M auf Band 2.

Wie in der Übergangsfunktion beschrieben

- aktualisiert U die Inschrift auf Band 1,
- bewegt U den Kopf auf Band 1, und
- verändert U den auf Band 3 abgespeicherten Zustand von M.

Laufzeit eines Schrittes: $O(1)$.

Das bedeutet U simuliert M mit konstantem Zeitverlust!

Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band) TM erreichen?

Natürlich können wir die beschriebene 3-Band TM auf der 1-Band TM mit mehreren Spuren simulieren.

Aber bei Verwendung dieser Simulation handeln wir uns einen quadratischen Zeitverlust ein

Wir erhalten eine **universelle 1-Band TM mit konstantem Zeitverlust**, wenn wir ... die Gödelnummer auf Spur 2 und den Zustand auf Spur 3 mit dem Kopf der TM M mitführen.