Der Satz von Rice

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität
RWTH Aachen

November 2011

Bisher betrachtete Probleme

Die Diagonalsprache:

$$D \;=\; \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

Das Halteproblem:

$$H \;=\; \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}$$

Das spezielle Halteproblem:

$$H_\epsilon \;=\; \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$$

Alle diese Probleme sind nicht rekursiv. Was haben diese Probleme gemeinsam?

Von TM berechnete Funktionen sind partielle Funktionen

Da TM nicht auf jeder Eingabe halten, berechnen sie „partielle Funktionen". Das können wir wie folgt formalisieren:

- Die von einer TM M berechnete Funktion ist von der Form

  $$f_M : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \cup \{\perp\} \ .$$

  Das Zeichen $\perp$ steht dabei für *undefiniert* und bedeutet, dass die Maschine nicht hält.

- Im Fall von Entscheidungsproblemen vereinfacht sich die Funktion zu

  $$f_M : \{0,1\}^* \to \{0,1,\perp\} \ .$$

  Dabei steht 0 für *Verwerfen*, 1 für *Akzeptieren* und $\perp$ für *Nicht-Halten*.

Satz:

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der von TM berechenbaren partiellen Funktionen und S eine Teilmenge von $\mathcal{R}$ mit $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$L(S) = \{\, \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht rekursiv.

In anderen Worten: Aussagen über die von einer TM berechneten Funktion sind nicht entscheidbar.

Beispiel 1:

- Sei $S = \{f_M \mid f_M(\epsilon) \neq \perp\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(S) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} \\ &= H_\epsilon \end{aligned}$$

- Gemäß Satz von Rice ist H_ϵ nicht entscheidbar.
  (Aber das wussten wir ja schon ;-)

Beispiel 2:

- Sei $S = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) \neq \perp\}$.
- Dann ist

$$
\begin{aligned}
L(S) &= \{\,\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\
&= \{\,\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\,\}
\end{aligned}
$$

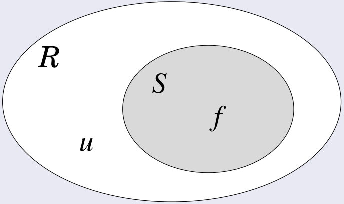
- Diese Sprache ist auch als das *allgemeine Halteproblem* H_{all} bekannt.
- Gemäß Satz von Rice ist H_{all} nicht entscheidbar.

Beweis:

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_{L(S)}$, die $L(S)$ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_ϵ, die das spezielle Halteproblem H_ϵ entscheidet.

Einige Vereinbarungen:

- Sei u die überall undefinierte Funktion.
- O.B.d.A. $u \notin S$.
- Sei f eine Funktion aus S.
- Sei N eine TM, die f berechnet.



Bemerkung: Im Falle $u \in S$ betrachten wir $\mathcal{R} \setminus S$ statt S und zeigen die Unentscheidbarkeit von $L(\mathcal{R} \setminus S)$. Hieraus ergibt sich dann unmittelbar die Unentscheidbarkeit von $L(S)$.

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Die TM M_ϵ mit Unterprogramm $M_{L(S)}$ arbeitet wie folgt

1) Falls die Eingabe nicht aus einer korrekten Gödelnummer besteht, verwirft M_ϵ die Eingabe.
2) Sonst berechnet M_ϵ aus der Eingabe $\langle M \rangle$ die Gödelnummer der TM M^* (nächste Folie).
3) Starte $M_{L(S)}$ mit der Eingabe $\langle M^* \rangle$ und akzeptiere (verwerfe) genau dann, wenn $M_{L(S)}$ akzeptiert (verwirft).

Verhalten von M^* auf Eingabe x

Schritt A: Simuliere das Verhalten von M bei Eingabe ϵ auf einer für diesen Zweck reservierten Spur.

Schritt B: Simuliere das Verhalten von N auf x, stoppe sobald N stoppt und übernehme die Ausgabe.

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow M^* \text{ berechnet } f \\ &\overset{f \in S}{\Rightarrow} \langle M^* \rangle \in L(S) \\ &\Rightarrow M_{L(S)} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow M_\epsilon \text{ akzeptiert } w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \notin H_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\ &\Rightarrow M^* \text{ berechnet } u \\ &\overset{u \notin S}{\Rightarrow} \langle M^* \rangle \notin L(S) \\ &\Rightarrow M_{L(S)} \text{ verwirft } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow M_\epsilon \text{ verwirft } w \end{aligned}$$

□

Beispiel 3:

- Sei $L_{17} =$
  $\{ \langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.
- Es ist $L_{17} = L(S)$ für $S = \{ f_M \mid f_M(bin(17)) = bin(42) \}$.
- Somit ist diese Sprache gemäß dem Satz von Rice nicht entscheidbar.

Beispiel 4:

- Sei $H_{17} =$
  $\{ \langle M \rangle \mid$ Auf jeder Eingabe stoppt M nach ≤ 17 Schritten$\}$.
- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!!!
- Ist H_{17} entscheidbar?