RWTH Aachen **SS 2004**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Lösungsvorschlag
Mölle—Richter—Rossmanith 12.08.2004

Diplom-Vorprüfung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Wahr: Jede Zahl n kann einfach binär kodiert werden ($\log n + O(1)$ Bits), und der Rest des Programms, das n dann ausgibt, hat ohnehin konstante Größe. **(b)** Falsch: $\sqrt{n}$ wächst wesentlich schneller als die allgemeine obere Schranke (vgl. (a)). **(c)** Falsch: Für k der Form 2^m (und das sind unendlich viele) gilt beispielsweise $n = 4^k = 2^{2k} = 2^{2^{m+1}}$ und somit $K(n) \le \log m + O(1) = \log\log\log n + O(1)$. **(d)** Wahr: Jedes Wort $w = a^n$ kann einfach durch n kodiert werden, und der Rest ergibt sich wie in (a). **(e)** Falsch: Ein Gegenbeispiel sind die Wörter aus der Teilsprache $\{0\}^*$ (vgl. (d)).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Falsch: Natürlich ist jede solche Sprache endlich und somit auch rekursiv, aber damit ist sie vor allem auch rekursiv aufzählbar. **(b)** Falsch: Das Nichthalteproblem ist nicht rekursiv aufzählbar, lässt sich aber als Differenz zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen schreiben (die Sprache aller Turingmaschinen mit Eingaben abzüglich der Sprache des Halteproblems). **(c)** Wahr: Zuerst die Rückrichtung; gegeben sei $M(L)$. Nun wird $M(L)$ solange simuliert, bis sie das erste Wort ausgibt, das in der kanonischen Ordnung nicht vor der Eingabe w kommt. Wenn dieses Wort sogar w ist, wird akzeptiert, sonst verworfen. (Sonderfall: Wenn $M(L)$ vorher anhält, wird ebenfalls verworfen.) Die andere Richtung ist einfach, weil man eine stets haltende Maschine M für L einfach nach und nach mit den Wörtern aus Σ^* füttern und die akzeptierten Worte ausgeben kann.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Das Partygäste-Problem ist **in NP**: Eine nichtdeterministische Turingmaschine kann eine Verteilung der Personen auf die drei Räume raten und anschließend prüfen, ob die Grußbedingung erfüllt ist.

Die **NP-Härte** zeigt man einfach mittels Reduktion von 3-Färbbarkeit. Gegeben sei also ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Wir interpretieren die Knoten als Personen und nehmen jedes Paar $\{v, w\} \in V^2$, das *nicht* in E liegt, in die Begrüßtenmenge B auf. Wenn wir nun die drei Räume als Farbklassen interpretieren, entspricht jede gültige Verteilung der Personen (bijektiv) einer gültigen Färbung der Knoten: je zwei Personen (Knoten), die sich noch nicht begrüßt haben (die durch eine Kante verbunden sind), müssen in verschiedenen Räumen (Farbklassen) sein.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Kontraposition lautet P = NP $\Rightarrow$ NP = co-NP. Wenn aber P = NP gälte, dann wäre die rechte Aussage äquivalent zu P = co-P. Dies aber gilt, denn das Komplement einer jeden Sprache $L \in P$ liegt wieder in P, weil man die Zustände q_{accept} und q_{reject} einer stets in Polynomialzeit haltenden Turingmaschine für L einfach vertauschen kann, um eine stets in Polynomialzeit haltende Turingmaschine für $\overline{L}$ zu erhalten.