Diplom-Vorprüfung zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir nennen eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ *gut komprimierbar*, wenn für eine Konstante $c \in \mathbf{N}$ und alle $w \in L$ die Aussage $K(w) \leq \frac{1}{2}|w| + c$ gilt.
Ist die Sprache $\{Kod(M) \mid M$ ist eine Turingmaschine und $L(M)$ gut komprimierbar $\}$ rekursiv? **Begründen** Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien A und B zwei rekursiv aufzählbare Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$. Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr? Beantworten Sie jede Teilaufgabe zunächst mit „wahr“ oder „falsch“ und **begründen** Sie dann Ihre Antwort.

a) $A \cup B$ ist rekursiv aufzählbar.

b) $A \cap B$ ist rekursiv aufzählbar.

c) $A - B$ ist rekursiv aufzählbar.

d) A^* ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten das Entscheidungsproblem *weighted vertex cover (WVC)*: Gegeben sind ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Gewichtsfunktion $w : V \to \mathbf{N}$ und eine Gewichtsschranke $b \in \mathbf{N}$. Gibt es eine Teilmenge C der Knotenmenge V, so dass für jede Kante aus E gilt, dass mindestens einer ihrer beiden Knoten in C liegt, *und* das Gesamtgewicht der Knoten aus C höchstens b ist?
Geben Sie eine polynomielle Reduktion von WVC auf ILP (integer linear programming) an. Beweisen Sie, dass Ihre Reduktion korrekt und polynomiell ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie: NLOG $\subseteq$ P

Anmerkungen:

- $K(w)$ ist die Kolmogorov-Komplexität des Wortes w.
- L^* ist der Kleenesche Abschluss über der Sprache L.
- Integer linear programming (ILP) bezeichnet das folgende Entscheidungsproblem: Gegeben ist eine Menge von linearen Ungleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten und Variablen. Gibt es eine Belegung der Variablen, so dass alle Ungleichungen erfüllt sind?
- NLOG = NSPACE($\log n$).

Viel Erfolg!